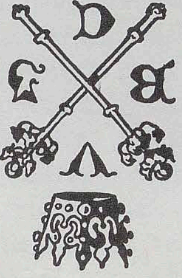
Abthl.

[illegible] 129

Z Xięgozbioru

Adama Czerwińskiego

...o absens ad requisitionem & notificatio...
...lavem ad illos transmittere tenebitur. Et si
...ollegæ præsentes habent facultatem feram
...ndi. *d. fol. 256. §. Koroná Krolestwá Polskiego.*
...inistrationem nonnullæ Provinciæ Regni sibi
...Nostra Regia eximentes, quam ipsis permit-
...d etiam alij volentibus liberum erit hoc
...n consensu omnium. Si verò videretur il-
...dministrationem justitiæ in personam No-
...e, tunc eande... Successo-
...SimiliterD.D.S... rdines M.
...olhyniæ, Kijo... jure Li-
...ituerunt inter... Comitijs
...suorum volu... admini-
...ód totum, pro... dente ma-
...ent, in Comi... ostræ jura-
...c in posterum... n & judi-
...*fol. 256. §.* ... *ta.*
..., quòd nullas ... ona nostra
...enatorum Spi... a nova in
.... & omnium ... gnum spe-
...nemus absq; ... dinum ex
...nopolia reru... gno & M.
...mittemus. *d. fol. 256. §. Osobliwie to wáruiemy.*
...ostrum plurimum spectat ad interesse Reipu-
...demus pro Nobis & Successoribus Nostris Re-
...uum respectu ejusmodi matrimonij absq; no-
...n Regni utriusq; Gentis faciemus, & præter
...acra expressas, nunquam divortium procura-
...*iż ná małżeństwie.*
... Legatos Nostros nomine Nostro porrectas
...c verbô Regiô Nostrô spondemus totum id,
...atum & jurium suorum Ordines Regni utri-
... Nobis porrigent, acceptamus &

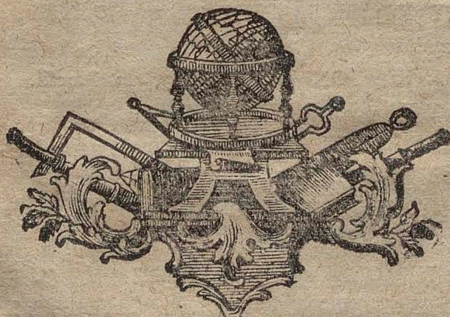


GEOMETRYA
DLA
SZKÓŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ I.

Drugi ráz wydana.

Bez oprawy Zł: 3.



W KRAKOWIE 1785. ROKU

w Drukarni Szkoły Główney Koronney.

Dziéło: *Geometryá*, ułożoné przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewéńskiégo, w Towarzystwo Nauk w témże Mieście ustanowioné policzonégo, które za ogłoszonéin w Polsce, i obcych kraiach Uczonych do pisaniá wezwaniém, z pomiędzy innych, potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnioné, a przez J. X. Gawrońskiégo Kanonika Koadjutora Krakowskiégo, Lektora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiadaiącégo, na Polski ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użyciá, podług przepisów naszych, podaiémy. W Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.

IGNACY Xżę MASSALSKI Biskup Wiléński, Prezyduiący.
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biskup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wda Kaliski.
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W. X. Lit.
MICHAŁ MNISZECH Sekrétarz W. L.
HIACYNT MAŁACHOWSKI Referénd. Kor.
IGNACY POTOCKI Pisárz W. W. X. Lit.
ADÁM Xżę CZARTORYSKI Gen. Ziém Pod.
JĘDRZÉY MOKRONOSKI Gen. Inspek. Woysk Kor.
STANISŁÁW Xżę PONIATOWSKI Gen. Lieut. W. K.
FRANCISZEK BIELIŃSKI Star. Czérski.
ANDRZÉY ZAMOYSKI Kawal. Ord. Orła Białé.

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY XIĘGI.

SŁO.

SŁOWNICZEK GEOMETRYCZNY,

Zamykaiący w sobie słowa nowé, albo mniey znané, użyté w téy Xiędze, z przydanemi obok słowami Łacińskiémi toż samo w używaniu Matematyków znaczącémi. *

Bezśrzednie	*Jmmediate.*
Bok	*Latus*
Cécha	*Characteristica*
Célowniki	*Dioptrae*
Ciénciwa	*Chorda*
Czworokąt	*Quadrilaterum.*
Dopełniénié	*Complementum.*
Dostawa	*Cosinus*
Dosieczná	*Cosecans.*
Dostyczná	*Cotangens.*
Dowodzénié	*Demonstratio.*
Forémny	*Regularis*
Jlość	*Quantitas*
Kąt	*Angulus.*
Kąt ostry	*Angulus acutus.*
Kąt prosty	*Angulus rectus.*

Kąt

* W niektórych mieyscach, w wykładzie słów łacińskich na swoyskié nie trzymaliśmy się słownégo tłumaczéniá, ale mieliśmy wzgląd na wyráz i bliższy do dokładnégo rzeczy wystawiéniá, i stósownieyszy do mowy Oyczystéy.

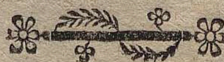
Kąt roſtwarty	*Angulus obtusus*
Kąt wewnętrzny	*Angulus internus*
Kąt zewnętrzny	*Angulus externus*
Kąt wyskakuiący	*Angulus ſaliens*
Kątomiérz	*Graphometrum*
Kąty na przemián	*Anguli alterni*
Kąty przyległé	*Anguli adjacentes*
Kąty przeciwné w wiérzchołku	*Anguli ad verticem oppositi.*
Koło	*Circulus*
Kołowy	*Circularis*
Kwadrat	*Quadratum*
Kwadrat ukośny	*Rhombus*
Kwadrowanié	*Quadratura*
Łuk	*Arcus*
Naſtępnik	*Consequens*
Na odwrot, *albo* odwrotnie	*Inverse* albo *in ratione inversa*
Niespółmierny	*Incommensurabilis*
Obwód	*Perimeter*
Odcinek	*Segmentum*
Odwrotny	*Inversus.*
Okrąg	*Circumferentia.*
Opisać	*Inscribere*
Oś	*Axis*
Oſtrokątny	*Acutangulum*
Pamiętnik	*Memoriale*
Piérwiaſtek	*Radix*
Piąciokąt	*Pentagonum*
Pión	*Perpendiculum*
Pionowy	*Verticalis.*
Podanié	*Propositio*
Podſtawa	*Basis*
Podziałka	*Scala*

Po-

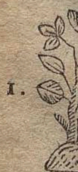
Poprzednik	*Antecedens*
Pośrzednie	*Mediate*
Powierzchniá	*Superficies*
Powietrzniá	*Atmosphera*
Poziemnie	*Horizontaliter*
Poziomy	*Horizontalis*
Prawidło	*Alidada*, albo *Regula*
Promień	*Radius*
Proſtokąt	*Rectangulum*
Proſtokątny	*Rectangulum* n p. *Triangulum*
Proſtokreślny	*Rectilineus*
Prostopadle	*Perpendiculariter*
Proſtopadły	*Perpendicularis*
Przeciwproſtkątná	*Hypothenusa*
Przedmiot	*Obiectum*
Przekątná	*Diagonalis*
Przenośnik	*Transportator*
Przypuszczénié	*Suppositio*
Przystawanié	*Convenientia*
Ramié kąta	*Crus Anguli*
Rozprawa	*Dissertatio*
Roztwartokątny	*Obtusangulum*
Równoboczny	*Æquilaterum*
Równoległobok	*Parallelogrammum*
Równoodległá	*Parallela*
Równoodległé	*Parallelae*
Równowága	*Libella*
Równoważénié	*Libellatio*
Różnoboczny	*Scalenum*
Rozwiązanié	*Solutio*
Sieczná	*Secans*
Skrayny	*Extremus*
Spełnienié	*Supplementum*

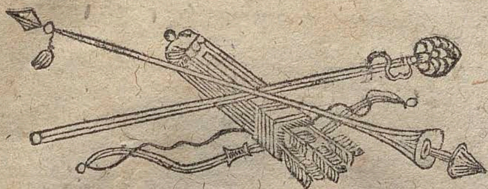
Spół-

Spółmierny	*Commensurabilis*
Spółśrzodkowy	*Concentricus*
Srzednica	*Diameter*
Srzodek	*Centrum*
Stanowisko	*Statio*
Stolik Geometryczny	*Tabula Praetoriana*
Stopień	*Gradus*
Stósunek	*Ratio*
Stósunek dwudzielny	*Ratio ſubduplicata*
Stósunek dwumnożny	*Ratio duplicata*
Stósunek ſkładany	*Ratio Composita*
Styczna	*Tangens*
Sześciokąt	*Hexagonum*
Tosamość	*Jdentitas*
Tróykąt	*Triangulum*
Twiérdzénié	*Theorema*
Twiérdzénié przybrané	*Lemma*
Ukośny	*Obliquus*
Warunek	*Conditio*
Wiérzchołek	*Vertex*
Wieszadło	*Pendulum*
Wniosek	*Corollarium*
Wpisać	*Jnscribere*
Wſtawa	*Sinus*
Wykładnik	*Exponens*
Wyproſtowanié	*Rectificatio*
Zasada	*Principium*
Zagádnienié	*Problema.*



CZĘŚĆ I.





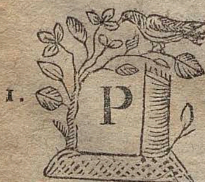
GEOMETRYI

CZĘŚĆ PIÉRWSZA

O Liniiach i powiérzchowniach.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Liniiach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.



1. PODRÓŻNY umieiący rachować kroki swoie, potrafi dochodzić iak długa była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniem i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamierzonego doniesie celu. Obadwa tak sposobią się do pewnieyszego wyobrażenia sobie długości i odległości, to iest: do porównania ich z temi, które iuż dobrze poznali i wyzna-

czyli. Krok iest taką dla podróżnego długością, a śrzednia ſtrzelby donośność, służy myśliwemu do wymiaru inney odległości.

Te proſte, i inne, im podobne ſposoby wyobrażenia ſobie długości niewiadomych, użyteczne są w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba osądzenia prętkiego, innych dokładnieyszych użyć nie pozwala. A ponieważ przez częste sposobów takich używanie, uczymy się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpádać zwykli byli; nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tyle iednak, ile to zgodzić się może z publiczną edukacyą.

Ale iakieyżekolwiek w tey mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawiania się; chybiać wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używając sposobu wyżey wspomnionego, różneby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iedneyże nawet długości; a zatem trudnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w tey mierze mogli, gdyby się pierwszego tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali.

2. Z tey pobudki udano się do ustanowienia umówioney pewney długości, któ-

rą-

ra na samo weyźrzénié, dokładnie sobie wyobrazić możná było. Do téy stósowano wszystkié inné długości niewiadomé, któré poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takową nazwaná iest *Miarą*.

3. W iednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła bydź używaná, według różnych okoliczności, któré się do iéy użyciá zdarzaią. W Polsce na przykład kupieckié niektóré towary, i pomnieyszé na ziémi długości łokciém podzielonym na cále i liniie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymiérzać na ziémi trzeba; używámy do tego sążnia z trzech łokci złożonégo, albo prętu zawiéraiącégo 7.½ łokci, a ieszcze lepiéy sznura, który 10. prętów zamyká.

Ponieważ té ostatnié miary nic nie są innégo, tylko łokieć kilka razy przydany; dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładné sobie wyobrażénié uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miár większych od łokcia. Wszystkié té słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnémi i bez zrozumiéniá, gdybyśmy dokładnégo nié mieli wyobrażéniá, iednéy z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkié naszé wyobrażéniá, któré o wielkościach mámy, są tylko *względnémi* (relativae) iedné do drugich.

 4. Kra-

4. Kraie różne odmiennych też miár zażywaią: a co ieszcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te lubo odmienne, iednemże słowem często się wyrażaią. (a) I tak łokieć Litewski iest $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnego; a zatem i inne Litewskie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miár Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie iest od Polskiego większy. Mila Niemiecka, zawiera prawie $1.\frac{2}{3}$ mili Francuzkiey, a mila Angielská trzecią tylko iest Francuzkiey mili częścią. (Obacz w 3. Częsci Arytmetyki, na karcie. 276.

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na samę tylko wzgląd miało się *długość*, wielkości tych, któreśmy uważali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samemi liniiami zaprzątamy, a w szczególności liniiami *prostemi*, gdy te wyznaczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednego ich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże sa-

mych

(a) Matematycy z wielką usilnością szukali miary iednostayney, do ktorey możnaby było stósować wszystkie inne. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości *Wieszadła prostego* (Pendulum simplex) ustawionego w mieyscu wolnem od zawad, i na powietrzu pomiarkowanem; ale ta materya należy do Fizyki.

mych liniiach báczył kto szczególniéy to mieyscé, gdzie się liniiá zaczyná, albo gdzie się kończy, lub gdzie iedna drugą przeciná; wtedy mówiłoby się, że się zaprzątá około *Punktu.* (b)

6. Przez iedén punkt możná tylé liniy rzeczą samą, albo przynáymniéy myślą poprowadzić, ilé kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w jakiéykolwiek od piérwszégo odległości, będzie wyznaczony, przez który liniiá prostá má przechodzić; w tym razie położénié téyże linii, iuż się wyznáczá; albo, co na iedno wychodzi, wszystkié Liniie prosté, któréby kto przez dwa Punkta dané poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatém, gdy dwie Liniie prosté schodzą się, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt iedén mieć spólny. Gdy się mówić będzie w szczególności o wymierzaniu na ziémi, powiémy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymiérzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielká.

7.

(b) Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za szczéré obiaśniéniá i wyłuszczéniá wyobrażéń, które do tych słów zwykliśmy przywięzywać. Im więcéy kto zastánawiá się nad początkami, na których zasádzaią się naszé wiadomości; tym większą postrzégá trudność w ich wyłożéniu.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią prostą, używamy narzędziá, które się nazywá *Liniiałém* (Regula) nie spuszczaiąc się na samą rękę i oko; i przystawiwszy tén Liniiał do dwóch wyznaczonych Punktów, kréślimy piórém, lub ołówkiém Liniią podaną.

Oprócz wymiaru Liniy prostych, przypádá często zatrudniać się położéniém ich, iednych względém drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spólny, mogą bydź do siebie nachylone rozmaitémi sposobami. Abyśmy tę wielość położéń ich, iednych względém drugich dobrze poięli; wystáwmy sobie Liniią iednę prostą na stole na przykład wyrytą, i drugą na niéy naprzód położoną, i zupełnie do niéy przystaiącą, a potém obrácaiącą się około Punktu wyznaczonégo, któryby tym obudwóm Liniióm był spólny. W takowém obrácaniu się, drugá Liniiá odmiénné coráz położéniá i nachyléniá mieć będzie względém piérwszéy. Té rozmaité nachyléniá nazywaią się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którégo ta druga Liniiá obrácała się, nazywá się *Wierzchołkiém kąta*, (Vertex Anguli.) Liniie, które nachyléniém swoiém tén kąt czynią, nazwać możná *Ramionami* (po Łacinie zowią takowé Liniie *Crura*.) Pod czas obrácaniá się tey Linii, Punkt którykolwiek

wiek w niéy naznaczony, w iednakiéy zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którégo statecznie się Liniiá obrácá: a zatém i wszystkié Punkta śladu od niéy zostawionégo, iednakowo będą odległé od tego Punktu nie wzruszonégo. Jeżeli obrácaiąca się Liniiá zupełny obrot uczyni, że znowu do pierwszégo położéniá, skąd się obrácać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samégo Punktu zostawiony, nazywá się *Okręgiém koła*, (Circumferentia Circuli) Własność Okręgu stąd wypływaiąca, iest ta: że każdy w nim znayduiący się Punkt, w równéy od iednégo Punktu zostaie odległości; a tén Punkt nazywá się *Śrzodkiém*. (Centrum.) Odległość śrzodka od któregokolwiek Punktu Okręgu, nazywá się *Promieniém*. (Radius) Część Okręgu, nazywá się *Łukiem* (Arcus), a Liniiá prostá łączącá końce dwa Łuku, nazwać się może *Ciéńciwą*. (Chorda.) Gdy Ciéńciwa ta przechodzi przez śrzodek Okręgu: a zatém dwa razy większá iest od promieniá, zwać ią będziemy *Śrzednicą* (Diameter.) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równé części, ktoré tém tylko różnią się, że iedna z iedney, a druga z drugiéy strony Śrzednicy iest położoná. (c)

9.

(c) Chcąc na papiérze nakréślić Okrąg koła, którégo śrzodek i promień mámy wyznaczony; używámy do tego narzędziá nazwanégo pospolicie *Cyrklém* (Circinus.)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznem działaniem tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożenia początku kątów, z którego pochodzą.

Jeżeliby Liniiá ruchomá, odprawiła obrotem swoim, połowę, trzecią część, czwártą, piątą i t. d. tey cáłey drogi, którą iey obeyśdź trzeba było, aby do pierwszego swego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek tey Linii, odprawił tem samem połowę, trzecią część, czwártą, piątą okręgu zupełnego, któryby ta Liniiá zrobiła w koło się obróciwszy. Skąd wyniká, że wierzchołek kąta obráwszy za środek, i od niego iakimkolwiek promieniem łuk nakreśliwszy; któryby między ramionami kąta zamykáł się; wielkość tego łuku koła, względem cáłego okręgu, do którego należy, dá nám poznać wielkość kąta, względem cáłego tego mieysca kątowego (Angularis) któreby iedna z tych dwóch Liniy przeszła, zaczynaiąc się obrácać wtedy, gdy na drugiey leżała, a nie kończąc się obrácać, aż znowu do niey przystánie. I przeto łuk ten nazwany iest Miarą (d) kąta między dwóma

(d) Ten wyráz *Miara* nie kładzie się tu w ścisłém rozumieniu; miara albowiem iakiey ilości właściwie wzięta, powinna bydź tego gatunku, którego iest ta ilość, która się mierzy: na przykład długość iedna mie-

ma ramionami zamkniętégo, a zatém tak łuk tén, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo zmnieyszaią, toiest: staią się razém podwóynémi, potróynémi i t. d.

10. Stąd się okazuie, że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawisła: (uwága to iest, nad którą dobrze zastánowić się potrzeba.)

11. Aby sposobém wygodnym wielkość każdégo kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętégo, którégo promień iest dany; zgodzono się na podzielénié okręgu iakiégożkolwiek na 360. części równych, z których każdá nazywá się *Stopniém* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, má w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały má 360; o tym także kącie mówią, że má 20, 30, 40. i t. d. stopniów. (e)

Na

rzy się przez długość inna. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnégo, a zatém łuk koła miarą kąta właściwie wziętą bydź nié może.

(e) W działaniach większéy dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy stopień na 60. części nazwanych *Minutami*, a każdą minutę na 60. *minut drugich* (Minuta secunda, *albo iednėm słowém*, secunda.)

Znak stopniów, iest: o nad liczbą stopniów napisané. o o o o

Tak n. p. 20, 21, 30, 31, i t. d. wymáwiá się: dwadzieścia, dwadzieścia iedén i t. d. stopniów.

Na tym gruncie zasadzá się cała robota i używanie narzędziów zdatnych do mierzénia kątów na ziemi, i sposób robiénia tychże kątów na papierze, któreby iakążkolwiek stopniów podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mowić potem będziemy.*

Dlá uniknięniá długości, którąby obszérné każdego działaniá wykładanié za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli pofolgowac, zgodzili się Matematycy na pewné nazwiska Punktów, Liniiów, Kątów i t. d. około których maią do czynieniá.

12. Punkt oznáczaią przez iednę tylko literę, n.p. A.B.C.D. i t. d. gdy położénié tego punktu iest wiadome: a n.p. przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiero szukaią iego położéniá.

Do oznaczéniá Linii używáia liter, które na dwóch iéy końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczonéy: ieżeli zaś w wielkości swoiey nie iest ograniczoná; tedy na niéy dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ią mianuią. Tak n.p. Liniia łącząca dwa punkta A i B oznaczoná byłaby
Táb. I. *Fig.* 1. temi dwiema złączonémi literami AB.

Dlá oznáczéniá kąta (ponieważ tén czynią dwie Liniie do siebie się nachylaiące)

iącé) kładą trzy litery iednę przy wiérzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta: a złączywszy ié razém, i w śrzodku ich położywszy literę nad wiérzchołkiém kąta napisaną, trzéma témi literami kąt wyrażaią. Tak n.p. kąt zrobiony przez dwie Liniie CA. CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazém: ACB. albo BCA. Gdy wiérzchołek nie należy do więcéy iak do iednégo kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wiérzchołkiém iego. Táb. I. *Fig.* 2.

13. Kiedy ramié ruchomé przez obrot swóy, któryméśmy początek kątów obiaśnili, uchodzi tylko czwártą część całégo okręgu: zrobi takim obrotém swoim dwa kąty równé z tą Liniią, około któréy się obrácá, gdy tę drugą daléy pociągniémy. Té kąty nazywaią się *Prostémi* (Anguli recti), łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś Liniiá ruchomá, będzie w tén czas *Prostopadłą* (perpendicularis) względém drugiéy. (Obacz w piérwszéy części Arytmetyki na karcie 87.) Táb. I. *Fig.* 3.

Gdy to ſamo ramié ruchomé obrotém swoim nie dochodzi czwártéy części okręgu; wtedy kąty między nim i drugiém ramiéniém przedłużoném uczynioné, będą nie równé. Jedén mnieyszy będzie od pro-

prostégo, a drugi większy. Té dwa kąty nazwané są *Przyległémi* (Adjacentes), albo (deinceps positi.) Mnieyszy od prostégo zowié się *Ostrym* (acutus) większy zaś od prostégo, *Roztwartym* (obtusus) a iedna z-tych Liniiá nazywá się *Pochyłą* (obliqva) do drugiéy. Kąty DCA. DCB. Tab. I. Fig. 4. są nierówné kąt DCB. iest ostry, a kąt DCA. roztwarty, Liniiá DC. pochyłá do Linii AB.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równá się dwóm kątóm prostym.*

Niech będzie DC. pochyłá do AB. summa kątów : DCB. DCA. równá iest dwóm kątóm prostym.

Jakoż, gdyby Liniiá DC. zrobiwszy obrotém swoim około Punktu C. kąt BCD, daléy się ieszcze obrácała, ażby naostatek przystała do linii CA ; byłaby obrotém; takim przeszła dwa katy prosté, ale téż razém byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc té dwa kąty są dwiéma częściami summy z dwóch kątów prostych złożonéy, a zatém równaią się dwóm kątóm prostym.

15. Gdyby Liniiá CD, była pociągnioná na drugą stronę linii AB, naprzykład aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, ieden wzgledém drugiego *Przeciwległémi w wierzchołku* (ad Verticem oppositi)

siti): maią one wierzchołek C. spólny, a ramiona CA, CE, iednego z tych kątów, są przedłużeniem ramión CB, DC, drugiego.

16. *Kąty w wierzchołku przeciwległe są równe.*

Jakoż w samey rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą bydź uważane, iak gdyby się zrobiły z obracania się Linii ED, około Punktu niewzruszonego C, zaczynaiąc ten obrot, gdy Liniia ED, na Linii AB, leżała, aż do położenia iey na CE. Tym sposobem Liniia ED, przez taki swóy obrot nachyli się do Linii AB, równie z jedney iak i z drugiey strony, a zatem czyni równe kąty DCB, ECA.

Wszystkie te *Podania* (Propositiones) którešmy dotąd przytoczyli, powinny bydź obiaśnione, wykonywaiąc ie, przez działania ręczne, na których się zasadzaią. (f) RO-

(f) Niech się nie obáwiaią Nauczyciele żádnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłumaczyć i obiaśniać będą wiele práwd Geometrycznych Uczniom swoim dopiéro poczynaiącym. Dalecy oni są ieszcze, aby w tey materyi domyślać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działania około tych rzeczy, któremi się zatrudniać maia, i zmysły ich na nie obrácać, iest to ieden z náyskutecznieyszych sposobów, bácznosć w nich, i uwagę do rzeczy przywiązać, a razém i natężeniu myśli pofolgować.

ROZDZIAŁ II.

O przystáwaniu Tróykątów, z przystósowaniem do rozwiązaniá wielu Zagádnień.

17. *Definicye:* Mieysce zakończone trzéma Liniiami prostémi, zowie się *Tróykątem prostokréślnym* (Triangulum rectilineum.) My samego przez się słowa *Tróykąt* używać będziémy. Linie trzy, w których się *Tróykąt* zamyka, zowiémy *Bokami* Tróykąta (Latera Trianguli.) Takié Linie zowią także *ścianami.* Tego nazwiska do innego potém znaczeniá użyiémy. *Przystáwanié*, (Convenientia) i przypádanié Figur iednych do drugich, na którém równość dwóch iakich Powiérzchni zakładámy, używané iest często w pospolitych życiá ludzkiégo potrzebach i wygodach. Na obicié na przykład pokoiów, bierzémy tylé płótna, lub innéy iakiéy materyi, ilé wystárczá na przykrycié ścián iego: i wielkość powiérzchni tego obiciá, nie różni się od ścián powiérzchni, które pokrywá tylko tém, że ściany są pod obiciém, a obicié na ścianach. Toż mówić o deskach wystárczaiących na podłogę, albo o szybach do okién i t. d. Krawcy o to się stáraią, aby tak suknie lub inné odzieniá wymiérzali, żeby té przystáwały iak náylepiéy do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie

Xięgi

Xięgi iednakowégo dzieła, dwa obrazy pod iednakowémi wymiarami odmalowané, nie różnią się co do powiérzchni, tylko tém, że nie są iedną rzeczą, ale dwiéma. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgadzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnégo, napełniá korzec ieden, iako i drugi; tylé w ieden garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy té miary stósuią się do iednéy ustanowionéy od Zwiérzchności.

18. *Twiérdzénie* (Theorema). Jeżeli w dwóch Tróykątach, dwa boki w iednym, równé są dwóm bokóm drugim, i kąty między témi bokami zawarté równé, trzeci też bok iednégo, równy będzie trzeciému bokowi drugiégo, i kąty przy tych bokach równych będącé, w iednym i w drugim Tróykącie będą równé.

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc, których boki: AC, ac, są równé, boki też BC, bc, równé i kąty: C, i c, równé. Dowiéśdź trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako też B, i b, będą równé. Táb. I. Fig. 5.

Dowodzénie (Demonstratio.) Wystáwmy sobie Tróykąt: abc, iakoby oderwany (co téż odstrzygszy go, i w rzeczy saméy wykonać można) i przeniesiony na Tróykąt: ABC, w tén sposób, aby położywszy linią ca, na linii CA, liniá też cb, przystała do linii CB, (co dlá ró-

wno-

wności kątów C, i c, nastąpić powinno.) Ponieważ liniia ca, równa iest linii CA; a liniia cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A i B; a zatém i liniie ab, i AB, będą przez té samé punkta zakończoné. Więc té dwie ostatnie liniié przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatém będą równé, i zrobią z liniiami ca, CA, cb, CB, kąty równé a, i A, iako też b, i B.

19. *Uwága.* Dwa Tróykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to, że odmiénné mieyscé zastępuią. O takich więc dwóch Tróykątach, a w powszechności i o każdych dwóch figurach, samém tylko położeniém mieysca różniących się mówimy, że do siebie *przystáwać mogą.*

20. *Przystósowanié: Jeżeli w jednym Tróykącie, dwa boki są równé, będą też równé i dwa kąty przy nich leżącé.*

Táb. I. Fig. 6. Niech będzie Tróykąt ABC, którégo boki AC, BC, są równé; kąty też A i B, będą równé.

Wystáwmy sobie, że tén Tróykąt ABC, wybity iest na drugiém mieyscu tak, żeby bok CA, w wybitym Tróykącie, to miał położénié, co bok CB, w Tróykącie piérwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na téy stronie leżał na któréy bok CA, w piérwszym: ponieważ kąt C, iest iednakowy w obudwóch tych Tróy-

kątach

kątach, położywszy tedy drugi Tróykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Tróykąta wybitego przystanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Tróykąta pierwszego, a zatém i Punkta B, i A, należące do Tróykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do pierwszego Tróykąta. Więc drugi Tróykąt przeniesiony na pierwszy, będzie mógł przystać do niego: a przeto kąty B i A, tego Tróykąta równe będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Tróykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Tróykącie, iest równy także kątowi A drugiego Tróykąta; więc kąty A i B, Tróykąta podłożonego są równe kątowi A, w Tróykącie na nim położonym; a zatém kąty A i B, są sobie równe.

Następuiące tegóż twierdzenia dowodzenie, zastanawia prawie wszystkich poczynaiących, i wielu iest zdania, lubo często zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie się poznawać poiętność Ucznia i sposobność do Geometryi.

Niech będzie Tróykąt CAB, którego boki AC. CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równe. Tab. I. Fig. 7.

Przygotowanie. Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek linie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

Dowodzénie. Ponieważ liniie CA, CB, są równé, a liniie téż AD, BE, wzięté są równé; więc w Tróykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C iest spólny, ramiona CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równé będą; a zatém te dwa Tróykąty przystać do siebie mogą; (18) a w szczególności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, rowné będą.

W Tróykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równé, dowiodło się téż, że liniie BD, AE, są także równé, i że równé są kąty w tych ramionach zawarté przy D, i E; więc té Tróykąty mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty: DAB, EBA, są równé, a zatém i im przyległé: CAB, CBA, będą równé.

21. Gdyby wszystkié trzy boki w Tróykącie były równé; trzy także kąty w nim równéby były.

22. *Definicye*. Gdy w Tróykącie dwa boki są równé: taki Tróykąt zowiémy *Równoramiénnym* (Isosceles albo Aequicrurum.) Gdy w Tróykącie boki trzy będą równé; nazwiémy go *Równobocznym* (aequilaterum.)

Gdy w Tróykącie wszystkié trzy boki nierówné będą, zwać go będziémy *Różnobocznym* (Scalenum.)

23.

23. *Twierdzenie* 2. Gdy dwa Tróykąty, maią bok ieden równy, i gdy dwa kąty przy tym bóku iednego troykąta, równe są względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Tróykąta; trzeci też kąt w iednym Tróykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względem siebie będą w obudwóch tych Tróykątach.

Nieciháy naprzykład w dwóch Tróykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. Táb. I. Fig. 5.

Dowodzenie. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony na Tróykąt ABC, i na nim położony, tak, aby Punkt *a*, postawiwszy na Punkcie A, liniiá ab, równá linii AB, na niey leżała. Poniewaž kąt *a*, równá się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; liniiá też *ac*, przystanie do linii AC: a liniiá bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znáydować razem i na linii AC, i na linii BC; a zatem znáydować się będzie na ich spólnem przecięciu C. Więc Tróykąt abc, zupełnie przystanie do Tróykąta ABC, a przeto linie ac i bc, równe będą liniióm AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystósowanie*. Jeżeli w Tróykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równe; taki Tróykąt będzie *Równo-*

 ramien-

ramiénnym. Dowodzénié tego podobné iest wcale dowodzéniu położonému w przystósowaniu piérwszégo Twiérdzénia (20.) Jeżeli Tróykąt ma wszystkie trzy kąty równé, będzie Równobocznym.

25. *Twiérdzénié 3.* Gdy w dwóch Tróykątach, boki trzy iednégo, równé są trzém bokóm drugiégo; i kąty téż trzy w jednym, będą równé trzém kątóm w drugim, a té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Táb. II. *Fig. 1. i 2.* Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, takié, aby bok AB, w piérwszym równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równé bokóm ac, bc, té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Dowodzénié. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony i położony pod Tróykątém ABC, tak, iak go wyrážá na figurze Tróykąt ABD. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ liniie CB, BD, są obiedwie równé linii cb, są téż i sobie równé; więc i kąty: BCD, BDC, są równé (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, są także równé: a zatém i kąty: ACB, ADB, równé będą.

Więc dwa Tróykąty: ACB, ADB, mogą przystać do siebie. Ale że téż Tróykąty: ABD, i abc, przystać do siebie

bie mogą; więc przystaną także i Tróykąty: ABC, abc.

26. *Uwága*. Położénié linii CD, może bydź troiakié, bo może albo przecináć linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużénié téyże linii AB. Dowodzénié toż samo iest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagádniénié*. (Problema.) Maiąc dané dwa Punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdégo z tamtych, w jednakowéy był odległości.

Rozwiązanié (Solutio.) Od iednégo i od drugiégo z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promieniém większym od odległości tych dwóch Punktów; tam gdzie się té dwá łuki przecinać będą, będzie punkt, którégo szukámy.

28. *Uwága*. Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwégo zagádniénia, zasádzá się *Wykréślénié* Geometryczné wielu innych Zagádnień. Wykréślénié to zowią po Łacinie *Constructio*, lubo tego samégo słowa zażywaią także Matematycy na oznaczénié przygotowaniá poprzedzaiącégo dowodzénié, przez kréślénié pewnych liniy potrzebnych do tegoż dowodzéniá. My przykładém ich, w obudwóch także razach, używać będziémy tego słowa *Wykréślénié*.

29. *Zagádnienie* 2. Daną liniią prostą, podzielić na dwie części równe.

Rozwiązanie. Sposobem w poprzedzaiącem Zagádnieniu wyrażonym, znáydźmy po obudwóch linii tey stronach dwa punkta, któreby od końców iey iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta liniią prostą, ta przetnie w jednym punkcie liniią daną, i w tem przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Tab. II. Fig. 3. Niech będzie liniia daná AB, C Punkt równo-odległy od A i B, końców linii daney, D, drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie liniia CD, przecina liniią AB, dzielić będzie na dwie rowne części liniią daną.

Wykreślenie, (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenie. Tróykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równe iedne drugim; a zatem (25.) mogą przystać do siebie, a w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Tróykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, spólny, i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa Tróykąty mogą do siebie przystać, i liniie AX. i BX. są równe.

30. *Defin:* Gdy w Tróykącie, albo w jakieykolwiek inney figurze, bok ieden

dén będzie przedłużony; kąt, który się między tém przedłużéniém i bokiém przyległym zrobi; nazywá się *Zewnętrznym* (externus) tego Tróykąta, lub innéy figury.

31. *Twiérdzénie* 4. W Tróykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednégo z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AB. przedłużony iest według upodobaniá ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykłád C. Táb. II. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowádźmy liniią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniymy ieszcze i liniią BF.

Dowodzénié. Tróykątów: AEC, FEB, kąty przeciwné w wiérzchołku E, są równé, i ramiona tychże kątów równé, z wykréśléniá. Więc dwa té Tróykąty, mogą do siebie przystać (18.) a w szczególności kąt C, równy iest kątowi EBF, który kat EBF, iest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy iest od kąta C, równégo kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątów w Tróyką-

cie, mnieyszá iest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiém kąt CBD, większy iest od kąta C, Summa kątów CBD, ABC, większá będzie od Summy kątów C, i ABC; a że summa dwóch kątów piérwszych, waży tylé co dwa kąty prosté, bo iest summą dwóch kątów przyległych (14) więc ta drugá summa mnieyszá iest od piérwszéy.

Idzie zatém, że ieżeli w Tróykącie, będzie kąt iedén prosty, albo też roztwarty, dwa inné, nié mogą bydź tylko każdy z nich ostry.

33. *Defnicye.* Jeżeli Tróykąt zawiérá w sobie kąt prosty, zowié się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwartokątnym* (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkié trzy kąty ma ostré, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzénié 5.* Gdy w dwóch Tróykątach, bok iednégo będzie równy bokowi drugiégo, i kąt tym bokóm przyległy równy iedén drugiému, a kąt nieprzyległy tym bokóm, także równy w obudwóch Tróykątach; dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie.

Tab. II. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, maiącé dwa boki AB, ab, równé, kąty A, i a, przy tych bokach równé, i kąty C,

C, i c, równé. Té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać.

Dowodzénié. Przenieśmy Tróykąt abc, na Tróykąt ABC, tak, aby bok ab, przystáwszy do boku AB, bok téż ac przystáwał do boku AC; (co dlá równości kątów a, i A, nastąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypádł na punkt C, toby przypádł albo między punktami A i C, naprzykłád na d, albo daléy za punktém C, na linii AC, przedłużonéy, naprzykłád na D; w piérwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBd, a zatém większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBD, a zatém większy od kąta D, albo c; co w obudwóch razach, iest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dané, są równé. Więc liniiá ac, przeniesioná na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatém Tróykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie. (18.)

35. *Twiérdzénié 6.* W każdym Tróykącie, ieżeli bok iedén większy iest od drugiégo; i kąt téż na przeciwko boku piérwszégo, większy będzie od kąta drugiému bokowi przeciwnégo.

Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AC, większy od boku BC; będzie téż i kąt ABC, większy od kąta A. Táb. II. *Fig.* 5.

Przygotowánié. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowádźmy DB. *Dowo-*

Dowodzénié. Tróykąt równoramienny BCD, má kąty CBD, CDB, równé: kąt CDB iest zewnętrzny Tróykąta BAD; więc iest większy niżeli kąt A; a zatém i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopiéroż kąt CBA większy iest od tegoż kąta A.

36. *Twiérdzénié* 7. Gdy w Tróykącie, większy iest kąt ieden od drugiégo; bok na przeciwko piérwszégo kąta, większy téż będzie od boku przeciwnégo drugiému kątowi.

Dowodzénié. Gdyby bok przeciwny piérwszému kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiému kątowi przeciwnégo, piérwszy téż kąt byłby równy drugiému, albo od niego mnieyszy. (35.) Ale przez podanié, tén piérwszy kąt nié iest ani równy, ani mnieyszy od drugiégo; więc téż i bok tému piérwszému kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiégo boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwága*. W tém twiérdzéniu użyliśmy piérwszy ráz dowodzéniá *zbocznégo*, albo *przez niepodobność*. Po Łacinié piszący, nazywaią takié dowodzénie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuie się tym sposobém, że wszelkié inné odmienné w téy mierze utwiérdzénié, byłoby fałszywém: a zatém to tylko iest prawdziwé, któré go dowodzimy.

38.

38. *Wnioski.* Ponieważ w Tróykącie prostokątnym i w Troykącie roztwartokątnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątów náywiększémi; przeto też boki naprzeciwko takich kątów leżące, będą náywiększe.

A stąd między wszystkiémi liniiami poprowadzonémi od tegoż samégo punktu, od iedney linii, naymnieyszá iest liniiá prostopadłá. Inné linie pochyłé, tym większé będą, im dalszé od prostopadłéy. Dwie także linie pochyłe, rówńey wielkości, od Punktu tegoż samégo poprowadzić możná; a nie więcey, i té od prostopadłéy równie będą odległé.

Stąd też wypływá, że liniiá prostá, nie może przecinać okręgu koła w więcéy, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od śrzodka koła, równá się promieniowi tegoż koła: bo inaczéy więcéy niż dwie linie równé, możnáby poprowadzić od iakiégo punktu do trzeciey linii.

39. *Defin:* Liniiá prostopadłá, spuszczoná od iakiégo punktu na inną liniią, nazywá się *odległością* tego punktu od linii, na którą spádá: a to dlá tego, że ta liniiá iest naykrótszą między wszystkiémi innémi, któréby od tegoż punktu można poprowadzić do téy saméy linii.

40.

40. *Twiérdzénié*. 8. W Tróykącie summa dwóch boków, większá iest od boku trzeciégo.

Táb. II. Fig. 7. Niech będzie Tróykąt ABC, Summa dwóch boków AB, BC, większá iest od boku AC.

Wykréślénié. Pociągnąwszy daléy bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce liniią CD.

Dowodzénié. W Tróykącie równoramiénnym BCD, kąty C i D, są równé; więc w Tróykącie ACD, kąt ACD, większy iest od kąta D; a zatém i bok AD, większy będzie od boku AC: a że AD równá się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków iest większá od boku AC.

41. *Uwága*. To twiérdzénié służyć nám może po części za obiaśniénié w tém, któré iuż mámy, naturalnym linii prostéy wyobrażéniu. Widzimy tu oczywiście, że liniiá prostá, którą łączy dwa Punkta, mnieyszá iest, niżeli summa dwóch innych liniy do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiégo, który się nie znáyduie na linii łączącéy té dwa punkta.

42. *Twiérdz:* 9. Jeżeli od śrzodka Linii prostéy wyprowadzimy prostopadłą; każdy Punkt w téy prostopadłéy,

będzie

będzie równo odległy od obudwóch końców linii pierwszey; każdy zaś inny Punkt za tą prostopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Niech będzie prostopadłá CD, do śrzodka C, linii AB. Táb. II. *Fig.* 8.

Naprzód: Odległości DA, DB, Punktu którégokolwiek D, wziętégo na linii CD, od Punktów A i B. są równé.

Dowodzénié. W Tróykątach ACD, BCD, kąty prosté przy C, są równé, i ramiona przy tych kątach równé; więc dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie; a zatém liniie AD, i BD są równé.

Powtóré: Niech będzie Punkt E, za prostopadłą DC, liniie EA, EB, nierówné będą.

Niech liniiá AE, przechodzi przez Punkt D, należący do prostopadłéy CD; od Punktu tego poprowádźmy liniią DB.

Dowodzénié. Liniie AD, BD, są równé, iako się iuż dowiodło: więc liniiá AE, równá się summie Liniy BD, DE. A że w Tróykącie BDE, summa boków BD, DE, większá iest od boku BE; więc też liniiá AE, większá iest od linii BE.

Zwy-

Zwykło się krócéy ieszcze to twiérdzénié tak wyrážać: *Liniiá prostopadłá, z pośrzodka innéy linii wyprowadzoná, iest mieyscém* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obudwóch końców teyże linii.* (g)

43. *Zagádniénié* 3. Od punktu danégo na linii prostéy wyprowadzić liniią prostopadłą.

Rozwiązanié. Weźmy na danéy linii dwa inné Punkta, iednakowo od punktu danégo odległé; od każdégo z tych dwóch punktów, iako od śrzodka (a centro) iednakowym promiéniém, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danégo, nakréślmy dwa łuki przecinaiącé się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, któréyśmy szukali.

44. *Zagádniénié* 4. Od punktu danégo za liniią prostą, spuścić na nię liniią prostopadłą.

Ro-

(g) Ponieważ liniiá prostá, przez dané położénié dwóch Punktów, iest już tém samém wyznaczoná; ieżeli tedy przez dwa inszé Punkta, z których każdy iednakową má od obudwóch punktów danych odległość, poprowadzimy liniią, ta w śrzodku linii łączącéy dwa punkta dané, będzie prostopadłą.

Rozwiązanie. Znáydźmy dwa punkta na linii daney, iednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od srzodka, iednakowym promieniem, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach liniią daną; szukáymy inszego iescze punktu rownie od dwóch przecięciá punktów odległego. Liniiá łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany, iest ta sama prostopadłá, którey śmy szukali.

45. *Zagádnienie* 5. 1. Na daney linii wystawić Tróykąt rownoboczny.

2. Na daney linii wystawić Tróykąt rownoramienny, którego ieden bok iest wiadomy.

3. Na daney linii wystawić Tróykąt, którego dwa inne nierówne boki są wiadome.

Rozwiązanie: 1. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym teyże linii, pociągnąć trzeba po iedney stronie dwa łuki, i punkt ich przecięciá złączyć z końcami linii daney.

2. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym linii, która ma służyć za ramie Tróykąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięciá poprowadzić dwie liniie do końców linii daney.

3.

3. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym służyć za boki do Tróykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie liniie do końców linii daney.

Przestroga. Summa dwóch liniy danych, powinna bydź większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Tróykąt, ile wystawiony iest na iakiey prostey linii; taka linia nazywa się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey stoiący nazywamy *Wierzchołkiem Tróykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystosowanie.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków Tróykąta za Podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze mieysce, i od końców iey promieniami, dwóm innym bokóm równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie liniie do końców podstawy; iuż tem samem przerysowany będzie Tróykąt dany, na inny iemu we wszystkiem równy.

48. *Zagadnienie* 6. Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby

miał

miáł za iedno ramię liniią daną, a za wierzchołek punkt na téy linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danégo, wziąść trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek liniie równé i końce ich złączyć trzecią liniią; zrobi się tym sposobém Tróykąt. Od punktu danégo na linii także danéy, przenosi się długość, wzięta na iednéin ramieniu kąta danégo, i na niéy iak na podstawie, przerysuie się Tróykąt, pierwszému ze wszystkiém równy (47.)

49. *Przystósowanie.* 1. Zrobić Tróykąt, którégo wiadomé są dwa ramiona, i kąt między niémi.

2. Zrobić Tróykąt, którégo wiadomá podstawa, i dwa przy niéy kąty.

50. *Zagádnienie* 7. Zrobić Tróykąt, którégo dany iest kąt iedén, i dwa boki, iedén przyległy kątowi danému, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwága. Kąt dany może bydź *prosty*, *roztwarty*, albo *ostry*. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danému, powinién bydź większy od boku przy kącie będącégo. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może bydź większy lub mnieyszy od drugiégo. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danému, i dáymy mu za

C ra-

ramię, liniią równą daney, a maiącey mu służyć za toż ramię.

Z końca tey Linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć na przeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramię. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Táb. II. Fig. 9. i Táb. III, Fig. 1, 2, 3. Niech będzie C wierzchołek kąta danego, liniia CA równa linii daney za ramię tego kąta, i niech łuk kreślony od punktu A, iako od śrzodka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramię w punktach B, i b.

1. Gdy kąt C iest *Prosty*; dwa Tróykąty: ACB, ACb, mogą przystać do siebie; bo liniie pochyłe rowne AB, Ab, iednakowo są od prostopadłey AC odległe, a zatem CB i Cb są równe.

W jnnych razach spuśćmy liniią prostopadłą AD.

2. Gdy kąt C iest *Roztwarty*, albo *ostry*, ale liniia AB, większa od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab, dalsze są od prostopadłey AD, niżeli liniia pochyła AC; a zatem z dwóch Tróykątów ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3.

3. Gdy kąt C iest *ostry*, ale liniiá AB mnieyszá od AC; dwie linie pochyłé i równé: AB, Ab, będą bliżſzé prostopadłéy AD, niżeli liniiá AC; a zatém Tróykąty ACB, ACb, lubo sobie nierównė, obadwa iednak wypełnią trzy założoné warunki.

Powtorzénié przypádków, w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, albo w których Tróykąt wyznaczony iest przez wiadomość dostateczną boków i kątów iego.

1. Dwa boki i kąt między niémi.

2. Bok iedén i dwa przy nim kąty.

3. Trzy boki.

4. Dwa boki i kąt prosty nie między niémi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niémi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny danému kątowi iest náywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny kątowi danému iest náymnieyszy. (Tén przypádek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobém Tróykąt czyni zadosyć trzem warunkóm.

51. *Uwága* 1. Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z jnnych ieszcze wyznaczyć można Tróykąt. Té iednak, które się tu wspomniały przypádki, náyczęściey zdarzać się zwykły, i wszystkié inné mogą się pod nié podciągnąć.

Cztéry ostatnié przypádki mogą bydź ściągnioné do iednégo. (Obácz w Rozd: 10. Twiérdz: 5.) Ale przy początkach lepiéy ié osobno podáwać.

52. *Uwága* 2. Samé tylko Tróykąty są takiémi figurami, gdzié wiadomość trzech boków iuż iest dostateczná do wyznaczéniá Tróykąta. Okázać to w prostym przykładzié možná na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którégo wszystkié boki są równé. Choćiaż albowiém wiedzieć będziémy boki wszystkié tego Czworoboka; nie potrafimy iednak oznaczyć iaki Czworokąt stąd wyniknie, bo tym bokóm różné dadź możémy nachylénié; a zatém i Czworokątowi odmienną dadź możémy figurę. Tak n.p. ieżeli dámy mu kąty wszystkié prosté, zrobi się *Kwadrat*: ieżeli dámy dwa kąty ostré, a dwá roztwarté, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziéy, im ostrzszé iedné kąty, a drugié roztwartszé mieć będzie.

53. *Twiérdz:* 11. Liniiá prostá przecinaiącá kąt na dwie części równé, każdy

źdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obudwóch ramion tegoż kąta: a wszelki inszy nie na tey linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednégo ramieniá tego kąta, iak od drugiégo.

Niech będzie kąt: ACB, który na dwie części przeciná liniiá CD; ieżeli Punkt iaki na niey, naprzykład D, weźmiémy, liniie prostopadłé DE, DF, do ramion tego kąta spuszczoné, będą równé. Táb. III. *Fig.* 4.

Dowodz: Dwa Tróykąty prostokątné CDE, CDF, któré bok CD spólny mają, i kąty przy C równé, mogą przystać do siebie (18.) więc liniie DE, DF, są równé.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłé GE, GH, będą nierówné.

Niech albowiém prostopadłá GE, spotyká w punkcie D, liniią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuśćmy prostopadłą DF, i poprowádźmy GF..

W Tróykącie DFG, summa linii FD, DG, większá iest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równá się linii EG; więc liniiá EG, większá iest od linii FG. A że znowu liniiá GF, większá iest od linii GH, (38.) więc tym bardziéy liniiá EG, większá będzie od linii GH.

54.

54. *Uwága.* Liniiá prostá, którá przedziélá kąt na dwie równé części, nazywá się *Mieyscém* wszystkich Punktów, których odległość iednakowá iest od dwóch liniy danych.

55. *Zagádn:* 8. Dány maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozwiązanié. Od wiérzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie liniie równé, z końców ich kreślę dwa łuki iednakowym promiéniém. Przez ich przecięcié, i przez wiérzchołek kąta, prowadzę liniią, ta dzielić będzie kąt na dwie równé części.

56. *Wniosek.* Będzie téż możná każdą z tych połowę podzielić daléy na dwie równé części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może bydź (przynáymniéy myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIÁŁ III.

O Liniiach równo-odległych i o równo legło-bokach.

57. *Twiérdzénié* 1. Niech będzie liniiá prostá, od któréy dwóch punktów wychodzą dwie liniie prostopadłé. Té prostopadłé nigdzie się nie zniydą, choć-

choćbyśmy ié náybardziéy przedłużali.

Dowodz: Gdyby té prostopadłé, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią liniią, od któréy są wyprowadzoné, Tróykąt maiący dwa kąty prosté; a to iest niepodobna.

58. *Defin:* Dwie liniie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzoné, gdy się zeyśdź z sobą nié mogą, nazwané są *Równo-odległé* (Parallelae.)

W ogólności zaś mówiąc: iakiékolwiek liniie dwie prosté od trzeciéy przecięté iednakowo z jednéy strony nachylaiącé się do téy trzeciéy linii, są równo-odległé.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięté w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równé; te dwie liniie nié mogą się nigdzie zeyśdź z sobą. Gdyby albowiém gdzie się zeszły, w Tróykącie z nich i z trzeciéy linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednému z wewnętrznych CAE; co bydź nié może. (31.) Táb. III. *Fig.* 5.

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równá się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF kątowi CAE, można podobnie dowieśdź że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiéy ftrony linii HE.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Jednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH. CAE, nazywaią się *Wewnętrzne* (Interni) takie też są i kąty: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemián, toiest na przemián ległémi (po Łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko daie się i kątóm CAE, GBH.

Té Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległé: DBE, DBH, czynią razém dwa kąty prosté: (14.) ale że kąt DBE równá się kątowi CAE, dlá równéy pochyłości obudwóch liniy DB, i CA, do linii HE; więc i kąty wewnętrzné: DBH, CAE, razém wzięté równé będą dwóm kątóm prostym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwné DBE, HBG, są równé (16.) więc i kąty na przemián CAE, HBG równé będą.

64. Pierwszé Twierdzénié można i tak wyrazić: że ieżeli dwie liniie prosté przecięté przez liniią trzecią, czynić będą z nią kąty iednostronné równé, albo kąty na przemián równé, albo że dwa kąty wewnętrzné równać się będą summie dwóch kątów prostych; takié liniie będą równo odległé.

65.

65. *Zagádn:* 1. Daną maiąc iednę liniią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech będzie liniiá daná BC, i punkt A także dany: przez ten Punkt poprowadzić liniią równoodległą od linii daney BC. Táb. III. *Fig.* 6.

Rozwiązanie. Przez Punkt A ciągniymy iakążkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zróbmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Liniiá AE, będzie tą równoodległą, któreyśmy szukali.

Dowodz: Kąty na przemián DAE, ADC, są równe, więc liniie BC, AE, są równoodległe.

66. *Twierdz:* 2. Jeżeli kąty iednostronné CAE, IBE, nie są równe, choćby też i bardzo nieznaczná była ich różnica; wszelako iednak liniie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątów wewnętrznych IBH, CAE, mnieyszá, albo większá iest od dwóch kątów prostych; tedy dwie liniie CF, IL, zniydą się z tey strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieyszá od dwóch kątów prostych. Táb. IV. *Fig.* 1.

Na dowodzénié tego Twierdzéniá wysilali od dáwnych czasów dowcipy swoié Geometrowie, i pospolicie fałszywie ié dowodzili; bo będąc to Twierdzenié

w so-

w sobie tak iasné, można było i bez dowodzéniá na nié przystać. Można iednak dowieśdź ié bez popadnieniá omyłce: ale dowody té tak długié, że ciąg i związek ich, wielkiégo natężéniá, uwagi, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniów tym bardziéy, imby mniéy przeświadczéni byli o pożytku i potrzebie tego dowodzeniá. Rozumiém, idąc w tém za przykładém Euklidesa, że lepiéy iest miec to Twiérdzénié za oczywisté, zwłászcza dowiódłszy iuż dwóch innych Podáń *odwrotnych*, (Propositio inversa:) piérwszégo, że, gdy liniie schodzą się z sobą, kąty iednostronné są nie równé: drugiégo, że, gdy kąty iednostronné równé są, liniie z sobą się zeyśdź nigdzie nié mogą.

67. *Wniosek*. Jeżeli dwie liniie są równoodległé, a trzeciá ié przeciná; kąty iednostronné będą równé, kąty na przemián także równé, i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summié dwóch kątów prostych. Jeden z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugié, tak, iak w piérwszém Twiérdzéniu. Jakoż, gdyby którákolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwá, iużby tém samém liniie zeyśdź się gdzie z sobą mogły, toiest nie byłyby równoodległé.

Defin: Czworokąt, którégo boki naprzeciwko siebie leżącé są równoodległé, na-

nazywać będziemy *Równoległobokiém*. (Parallelogrammum.) Liniią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Diagonalis.)

68. *Twierdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD, mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe. Táb. IV. *Fig.* 2.

Przygotowanie. Poprowádźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Tróykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie: maią albowiém bok AC spólny, kąty na przemián ACD CAB, równe, i kąty na przemián CAD, ACB także równe; a zatém (23.) i liniie AB, DC są równe, iako też i liniie AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątów względém siebie równych w obudwóch Tróykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątná dzieli Równoległobok na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Jeżeli dwie liniie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów

ków iedney, dwie prostopadłe do drugiey, te prostopadłe równe będą.

71. *Wniosek* 3. Jeżeli Równoległobok má iedén kąt prosty, wszystkie też inne kąty iego proste będą; a ieżeli dwa iego boki przyległe, są równe, wszystkie także boki równe będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którego kąty są proste, nazywá się *Prostokątém* (Rectangulum.)

Prostokąt, którego wszystkie boki są równe, zowie się *Kwadratém*. Równoległobok, który má kąty nierówne, zachowuie nazwisko Równoległoboku; lubo czasém z przydatkiém się wyráżá, że iest Równoległobokiém *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkie są równe, nazwany bydź może *Kwadratém ukośnym* (Rhombus.)

73. *Twierdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne są równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Fig. taż co wyżey Niech będzie Czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, CD, są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Przygotowanie. Poprowádźmy Przekątną AC. Do-

Dowodz: W Tróykątach: ACD, CAB, boki trzy w jednym równé są trzém bokóm w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą (25.) w szczególności zaś kąty na przemián CAB, ACD są równé, więc liniie AB, CD są równoodległé: podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległé.

74. *Twiérdz:* 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwné są równé, i równoodległé; taki Czworokąt iést równoległobokiém.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD są równé, i równoodległé, tén Czworokąt iest Równoległobokiém. *Fig. też co wyżéy*

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC.

Dowodz:: Dwa Tróykąty: ACD, CAB, maią bok AC spólny, boki AB i CD równé i kąty na przemián: ACD, CAB, zawarté między témi bokami, równé; więc przystać do siebie mogą; (18.) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równé, że zaś są na przemián: więc liniie AD i CB są równoodległé.

75. *Uwága.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległé, a dwa inné równé, a nie bydź przeto Równoległobokiém, chyba w tén czas, gdy boki przyległé

ległé bokóm równoodległym, są prostopadłé. Widzieć to można na Figurze 3. gdzie lubo Czworokąt ABCD, má boki dwa przeciwné: AB i CD równoodległé, boki AD i BC równé, nie iest iednak Równoległobokiém.

76. *Zagádn:* 2. Maiąc daną liniią prostą, postawić na niéy Kwadrat.

Rozwiązanié. Z końca iednégo linii danéy, wyprowádźmy prostopadłą iéy równą. Z drugiégo końca téy danéy linii i prostopadłéy, iako do śrzodka prómiéniém równym danéy linii, nakréślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięciá złączmy z końcém linii danéy i prostopadłéy.

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzié miáł wszystkié boki równé, i kąt ieden prosty; więc będzie Kwadratém.

77. *Zagádn:* 3. Wykréślić prostokąt, którégo boki są dané.

Sposób wykréśléniá iest tén sám, co wyżey, (76.) z tą różnicą, że prostopadłá powinná mieć długość daną, a nie bydź równą podstawie; promiénie także łuków kréślić się maiących, iedén powinién bydź równy podstawie, a drugi prostopadłey.

78. *Zagádn:* 4. Wykréślić Równoległo-

głobok, którégo kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykréśléniá tym tylko różni się od poprzédzaiącégo, że zamiást prostopadłey poprowadzić potrzeba liniią z tém nachyléniém, któréby czyniło kąt dany.

ROZDZIÁŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokréślnych, a w szczególności w Tróykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Tróykąta, większy iest od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iému przeciwnych; dowiedziémy teráz, że tén kąt zewnętrzny równá się obudwóm kątóm wewnętrznym naprzeciw siebie leżącym.

79. *Twiérdz:* 1. Niech będzie Tróykąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; tén kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C. Táb. IV. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Poprowádźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemián C i CBE są równé; równé także i kąty iednostronné: A, i EBD; więc summa kątów: C i A, równá iest summie kątów: CBE i EBD, toiest kątowi zewnętrznému CBD.

80. *Twiérdz:* 2. W każdym Tróykącie, summa trzech kątów równá iest dwóm kątóm prostym.

Niech będzie Tróykąt: ACB; summa trzech iego kątów, równá się summie dwóch kątów prostych.

Przygotowanié. Pociągniymy daléy AB, naprzykład aż do D.

Dowodz: Już się dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równá się dwóm kątóm wewnętrznym A i C; więc summa kątów CBD, i CBA, równać się będzie summie kątów: A, C, i CBA; ale summa dwóch piérwszych kątów, iako przyległych, wyrównywá dwóm kątóm prostym, więc i drugá trzech kątów summa, tymże dwóm kątóm prostym iest równá. (h)

18.

(h) To Twiérdzénié iest bardzo wielkiéy wági; przeto trzeba, aby iak náydokładniéy zrozumieli ié Uczniowie, iako inszé Twiérdzéniá, od których dowiedziénié tego zawisło. Tu podobno mieyscé byłoby pokázaniá związku Twiérdzéń dotąd podanych iednych z drugiémi, który to związek istotny iest postępowaniu Geometrycznému. Cwiczéniá, któré poprzedziły, iuż powinny były dadź poznać Uczniów tén sposób postępowaniá. Trzeba iednak często im związek takowy okazywać, i iak się iedna práwda z drugiéy odkrywá. Stąd náywiększy pożytek z Matematyki odniéść mogą, i nabiorą práwdziwe-

81. *Wniosek* 1. W Tróykącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ kąta iednégo prostégo, toiest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek* 2. W Tróykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tém samém znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Tróykąt, któ-régo kąt iedén má stopni 50°, a drugi 72°, summa tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122°. od dwóch kątów prostych, albo od 180°, iest 58°, i ta iest ważność trzeciégo kąta.

83. *Wniosek*. 3. W Tróykącie równoramiénnym, znaiąc kąt iedén, poznámy zaráz i dwa drugié.

Przykład. Niechby kąt iedén przy wiérzchołku wáżył 40°; w Tróykącie równoramiénnym. Już tém samém dwa inszé wáżą 140°; aże są równé, każdy z nich wáżyć będzie połowę, toiest 70°.

go ducha Matematycznégo: co nierównie pożyteczniéy im będzie, iak mieć nawet wiadomość saméy Matematyki.

Niechby znowu kąt ieden przy Podstawie ważył 64°, i drugi przy Podstawie ważyłby 64°. Summa tych dwóch kątów byłaby 128°, a różnica między 180°, i 128°. toiest 52°, pokázałyby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin*: Figura maiącá więcey niż cztery boki, albo kąty, nazywá się *Wielokątem* (Polygonum.)

85. *Twierdz*: 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokreślney* (Figura Rectilinea,) zawisła od liczby boków teyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoioney liczbę: 4; reszta okáże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokreślney. Nim się przystąpi do ogólnego dowodzeniá, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następuiącemu.

Niechby naprzykład Figura Prostokreślná miała tylko cztery boki, toiest niechby tylko była Czworokątem. Poprowadziwszy w niey Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Tróykąty, w których summa kątów razem wziętá, będzie równá summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Tróykątach, waży cztery kąty proste; więc

więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie cztéry kąty prosté.

Niechby Figura miała pięć boków, toiest była *Pięciokątém* (Pentagonum.) Poprowádźmy od iednégo wiérzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątné; podzielą oné Pieciokąt na trzy Tróykąty, których summa ważności kątów, toiest 6. kątów prostych, będzie téż summą ważności kątów Pięciókąta.

Dowodzénié ogólné. Od wiérzchołku kąta którégokolwiek w Wielokącie, poprowádźmy tylé przekątnych, ilé możná. Postrzeżémy łatwo, że Tróykątów liczba z tego podziału wynikaiącá, mnieyszá będzie dwoma, od liczby boków Wielokątá: albowiém od kąta tego, od którégo się prowadziły Przekątné, nie możná ich było prowadzić do dwóch innych kątów náybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa náybliższé boki, albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły Tróykątów. Ponieważ zaś w każdym Tróykącie ważność trzech kątów, równá się ważności dwóch kątów prostych, będzie więc dwa razy tylé zawiérało się (co do ważności) kątów prostych w Wielokącie; ilé się zawiérá w nim Tróykątów. A że liczba Tróykątów, mnieyszá iest dwóma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów prostych, w tym-

że Wielokącie, będzie dwa razy tak wielka, toiest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niéy dwa razy 2. toiest 4; a zatém wážność kątów wszystkich wielokąta w kątach prostych znaydziémy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta. (i)

(i) Dowodzénie to mogłoby się wydáwać trudném, gdyby go wielé przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczególny przykład kréślone nie obiaśniły. Wielé iednak na tém zawisło, aby i bez Figury przyuczali się Uczniowie dáwać sprawę z tego, czego się nauczyli: a tym sposobém aby wprawiali się w zachowanié dobrégo porządku, tak w wyobražéniach, które sobie czynić będą, iako též i w samych wyrazach. Szczególnieyszégo zaś starania przykładać trzeba, aby bardziéy rozumém, niž pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagádnień, opuszczało się umyślnie Figury. Niech iednak stąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyśdź się mogło: i owszém niech przyuczaią Uczniów, aby ié sami sobie kréślić umieli z pamięci, zrozumiáwszy piérwéy Twiérdzéniá, do których dowodzéniá stósować się maią té Figury. Przykłady dotąd przytoczoné, tym sposobém się podáwały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dáwali sprawę z działań iuž dobrze od siebie poiętych. Odpowiédź náypospolitszá młodych iest, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaią: *Umiém ia to, ale się wytłumaczyć nié mogę.*

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daléy w jednę stronę boki wszystkie Wielokąta, iakążkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze iednak summa kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiém iednym i przedłużeniém drugiégo przyległego, ważyć będzie cztéry kąty proste. (k)

Nim się przystąpi do ogólnégo Dowodzenia, trzeba pierwéy na szczególnych przykładach tego Twierdzenia dowieśdź, zacząwszy od Tróykąta, w którym każdy kąt z swoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proste: a że kątów iest w Tróykącie trzy; więc z przyległémi ważyć będą sześć kątów prostych: trzy zaś kąty, które się w Tróykącie znáyduią, ważą dwa kąty proste: więc té, które są za Tróykątém, toiest zewnętrzne, ważyć będą cztéry kąty proste.

Dowodzénié ogólné. Każdy kąt wewnętrzny w Wielokącie, z swoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proste: więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proste wzięté tylé razy,

---

(k) Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy iest od dwóch kątów prostych, toiest o takich, w których kąty są wyskakuiącé (*Salientes.*)

zy, ilé iest boków w Wielokącie; a zatém summa samych kątów zewnętrznych, ważyć będzie tylé, ilé brakuie summie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty prosté wzięté tylé razy, ile má boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącém Twierdzeniu dowiedli,) brakuie do tego tey summie kątów cztéry; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty prosté.

87. *Uwága.* 1. Náywiększéy wági są té przypadki, w których kąty wszystkié Wielokąta są równé. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty prosté, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdégo kąta wewnętrznégo znaydziémy, odtrąciwszy tén Wieloráz, toiest: ważność iednégo kąta zewnętrznégo od dwóch kątów prostych.

Jeżeli wszystkié kąty wielokąta są równé; tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyszy będzie wewnętrzny: a im mnieyszy tamtén, tym tén większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzéniach, łatwo będzie Ucznióm ułożyć sobie Táblicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszystkié są równé, i mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty prosté, czyli przez stopnie.

88. *Uwága* 2. Umieiąc dowieśdź dwóch Twierdzeń poprzedzaiących, możná rozwiązać i to, co następuie zadanie:

Jak wielorakim sposobém około Punktu danégo napełnić możná mieyscé (to iest cztéry kąty próste) przez kąty Figury Prostokréślnéy iednégo gatunku, (1) i któréy wszystkié kąty są równé?

1. Gdy Tróykąt má wszystkié boki równé, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego wáży trzecią część dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo; a zatém sześć takich kątów, uczyni 4. kąty prosté, i napełni mieyscé około Punktu iednégo.

2. Gdy Czworokąt má wszystkié kąty równé czyli iest Prostokątém; każdy z kątów iego iest kątém prostym, a zatém 4. takié kąty wáżyć będą 4. kąty prosté.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którégo kąty wszystkié są równé, wáży $\frac{1}{5}$ część

(1) Mówię, *iednégo gatunku*, ponieważ gdyby wolno było miészać kąty różnych Wielokątów; możnáby 14. sposobami napełnić mieyscé około iednégo Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, które kąty wszystkié równé maią.

część czterech kątów prostych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednego kąta prostego; a zatem każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $\frac{1.}{5.}$ kąta prostego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proste i $\frac{3.}{5.}$ co iest mniey iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proste i $\frac{4.}{5.}$ co iest więcey iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącego wszystkie kąty równe nie można napełnic mieysca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1.}{6.}$ część czterech kątów prostych, albo $\frac{2.}{3.}$ iednego kąta prostego: a zatem każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie, 1. $\frac{1}{3.}$ kąta prostego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proste.

Jeżeli Wielokąt ma więcey niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcey niż 4. kąty proste; a że kąt Wielokąta maiącego boki wszystkie równe, iest zawsze mnieyszy od 2. kątów prostych; więc dwa takie kąty nie wystarczą na napełnienie mieysca około Punktu iednego.

Táb. IV. Fig. 5. 6. i Tab. V. Fig. 1. Przeto trzema tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie,

nie, toiest przez 6. kątów Tróykąta, przez cztery kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta.

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIÁŁ V.

O Równoległobokach i Tróykątach równych co do Powiérzchni, i o zamiénianiu iakiéykolwiek Figury Prostokréślnéy na Tróykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziele drugim przypádki w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, i bydź zatém co do Powierzchni, równé. W Rozdziele trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równé mogły przystać do siebie, i że zatem powierzchnie ich równé były. Te przypadki przystáwaniá iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni, przypádkami szczególnémi; ogólnieysze zaś w téy mierze Twierdzénia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twiérdzénie* 1. Dwa Równoległoboki zrobioné na iednéyże Podstawie, a z przeciwnéy strony zakończoné przez Linią rownoodległą od postawy, maią Powierzchnie równe. Niech

Táb. V. Fig. 2.3.4. Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ié z drugiéy strony, równoodległá od Podstawy Liniiá: DE. té dwa Równoległoboki, maią równé Powiérzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Dowodz: Tróykąty: DAF, CBE. mogą przystać do siebie; boki albowiém AD, BC są równé, bo naprzeciwko leżącé w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równé, bo naprzeciwko leżącé Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronné: ADF, BCE, i AFD, BEC, równé. Odiąwszy tedy osobno Tróykąt DAF, i Tróykąt iému równy CBE, od całéy Figury ABED; reszty będą równé, toiest Równoległobok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twiérdzénié możnáby obiaśnić Figurą z papiéru grubégo wyrobioną, i zacząć od przypádku, który wyrážá Figura 2. gdzie punkta C i F razém przypádaią. W takim razie Tróykąty: ACD, BEC równé są pierwszy i drugi Tróykątowi: ABC; a zatém i sobie są równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony iest z dwóch Tróykątów równych.

90. *Defin:* Ponieważ linije prostopadłé spuszczoné od któregokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są ró-

równé; ieżeli więc od punktu którégokolwiek w boku Równoległoboku spuścimy do boku przeciwnego liniią prostopadłą; ta prostopadła iednakowéy zawsze będzie wielkości, i nazywá się *Wysokością* tego Równoległoboku, względém drugiego boku, do którégo iest spuszczoná, i który wzięty iest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twierdzénié poprzedzaiącé możnáby téż i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiącé spólną Podstawę, i wysokość iednakową, są równé.*

91. *Twierdzénié* 2. Dwa Równoległoboki są równé, których Podstawy i wysokości równé.

92. *Dowodz:* Do Podstawy iednégo z tych Równoległoboku, przyłóżmy Podstawę drugiégo; przystaną zupełnie do siebie té Podstawy, bo są równé; będą więc té postawioné na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość; a zatém według piérwszégo Twiérdzéniá będą równé.

93. *Twiérdz:* 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobioné na iednéy Podstawie, równé maią Powiérzchnie, równé téż i wysokości miéć będą.

Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obudwóch Podstawa iest AB, i równá Powiérzchniá; maią oné i wysokość iednakową, to iest Táb. V. *Fig.* 5.

za-

zakończone są przez tę samę liniią rownoodległą od Podstawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iey przedłużéniu; toby inné iakié Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatém Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równé. Aleśmy wzięli za równé Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równé, co iest niepodobná, chyba że Punkta H i G będą té samé, co i Punkta F i E.

W ogólności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiącé równé Podstawy i Powiérzchnie, maią téż i równé wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powiérzchnie równé, i Podstawy ich równé będą.

94. *Twiérdz:* 4. Gdy Tróykąt i Równoległobok, stoi na teyże samey Podstawie, a wiérzchołek Tróykąta przypádá na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużéniu tegoż boku; taki Tróykąt iest połową Równoległoboku.

Táb. VI. *Fig.* 1. Niech będzie Równoległobok ABCD, a Tróykąt ABE, maiący z nim spólną podstawę AB, i niech wiérzchołek E,

Tróy-

Tróykąta przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Tróykąt ten ABE, będzie połową Równoległoboku ABCD.

Przygotowanie. Przez B poprowadźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

Dowodzenie. Tróykąt ABE, iest połową Rownoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Tróykąta iest Przekątną Równoległoboku: ABFE. A że Równoległoboki ABFE, ABCD, są równe; więc Tróykąt ABE, iest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Prostopadła spuszczona od wierzchołku Tróykąta do Podstawy, nazywa się *wysokością* tego Tróykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło bydź inaczey wyrażone: *Jeżeli Rownoległobok i Troykąt maią spólną Podstawę, i wysokość rowną, Troykąt ten będzie połową Rownoległoboku.*

96. *Wniosek.* Można więc przystósować wszystko do Tróykątów, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Troykąty maiące równe Podstawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2.

2. Dwa Tróykąty równé w Powiérzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą też miały równé Podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podstawy, wysokości, powiérzchni Równoległoboku lub Tróykąta, dwie którékolwiek wiadomé, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczná, aby z niéy dwie drugié wyznaczyć można. Obaczymy daléy w tym Rozdziele, iako można zrobić tylé Równoległoboków równych i równokątnych, ilé zechcémy, chociaż boki nierówné mieć będą. (m)

97. *Zagádn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamiénić go na Prostokąt, któryby tę samę miał Pódstawę i Powiérzchnią.

Rozwiązanié. Od obudwóch końców Podstawy, wynieśmy liniie prostopadłé, aż do boku Podstawie przeciwnégo; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powiérzchni.

Podobnym sposobém postąpić sobie po-

(m) Trzeba to dobrze dadź poznać Uczniόm, że wielkość Rόwnoboków i Tróykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w téy mierze częsté zwykły bywać.

potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszemu w Podstawie i w Powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. *Zagádn:* 2. Tróykąt dany zamienić na inny Prostokątny, któryby miał tę samę Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Tróykąta danego, poprowádzmy równoległą od Podstawy, a od końca którégokolwiek téyże podstawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległéy; Punkt przecięciá tych dwóch liniy będzie wierzchołkiém Tróykąta szukanégo.

Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc zamienić Tróykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dadź będzie potrzeba témagain drugiému Tróykątowi.

99. *Zagádn:* 3. Zamienić Tróykąt dany, na Rownoległobok prostokątny, któryby miał álbo tę samę co Tróykąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiążanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samę podstawę, i wysokość, co Tróykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatém Równoległobok tén, którégo szukámy, powinién mieć tę

samę

samę podstawę, co Tróykąt, a połowę iego wysokości; albo też tę samę wysokość, a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagadn:* 4. Czworokąt dany zamienić na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Rozwiąz: Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wiérzchołek iednégo z kątów iéy przeciwnych, pociągniymy równoległą od téyże przekątnéy. Wszystkié Tróykąty maiące za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wiérzchołek na równoodległéy od téy przekątnéy będą równé w Powiérzchni Tróykątowi, który czyni ta przekątná z dwoma bokami Czworokąta schodzącémi się na równoodległéy (96.) a zatém będzie też równy w powiérzchni témuTróykątowi, i Tróykąt maiący za Podstawę tę samę co i tamtén przekątną, a za bok iedén maiący przedłużénié aż do równoległéy, boku Czworokąta leżącégo z drugiéy strony przekątnéy; tén Tróykąt ostatni dodawszy do Tróykąta z drugiey strony przekątnéy leżącégo, zrobi się Tróykąt równy co do powiérzchni Czworokątowi danému: bo ponieważ Tróykąty dwa, na które iest Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią się co do powiérzchni całému Czworokątowi; więc témuż Czworokątowi równy także będzie co do powiérzchni i Tróykąt przez przekątną w Czworoką-

rokącie uczyniony: a drugi równy w powierzchni Tróykątowi drugiému wchodzącému także w Czworokąt i onégo dopełniaiącému.

Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niéy równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Tróykąta drugiégo w Czworokącie pociągniémy aż do zeyściá się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi si Tróykąt ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD. Táb. VI. *Fig.* 2.

101. *Uwága.* Tym sposobém postąpimy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiém Figurę iaką prostokréślną, bez odmiéniénia iéy powierzchni. Poprowadzimy naprzód przekątną, któraby odcięła Tróykąt ieden w Figurze podanéy; potém przez wierzchołek tego Tróykąta pociągniémy równoodległą od téy przekątnéy, aż do zeyściá się téyże równoodległéy z bokiém drugim przyległym do przekątnéy; naostatek złączymy punkt przecięciá z drugim końcem téyże przekątnéy.

Możná nawet użyć sposobu tego do zamiéniéniá iakiéykolwiek Figury prostokréślnéy, na Tróykąt téyże saméy, co i podaná Figura powierzchni; a to zmnieyszaiąc naprzód iednym bokiém Figurę podaną: potém odeymuiąc znowu

 bok

bok ieden, zmnieyszoney iuż iednym bokiem Figurze i t. d. póty, poki do trzech tylko boków, toiest do Tróykąta nie przyydziemy.

Tab. VI. Fig. 3. *Przykład.* Niechby trzeba zamienić Pięciokąt ABCDE na Tróykąt teyże samey powierzchni.

Poprowadźmy przekątne: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległe CG, EF, aż do ich zeyścia się z liniią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Tróykąt DFG będzie równy w powierzchni Piąciokątowi danemu.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że Tróykąt może bydź zamieniony na Równoległobok prostokątny, maiący tę samę co i Tróykąt powierzchnią; a zatem można każdą Figurę prostokreślną zamienić zawsze na prostokąt nie różniący się od niey w powierzchni, mogąc ią pierwey zamienić na Tróykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie iakie Figury prostokreślne, któreby śmy iuż zamienili obiedwie na Prostokąty; i niechby te dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był

w po-

w powierzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiem, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstaw w obudwóch mnieyszych Prostokątach (gdyby ich wysokości były równe), i tę samę co one wysokość, byłby równy w powierzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się także pokaże, iż można zamienić Prostokąt ieden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w sobie bok ieden dany: a zatem można zawsze dwa Prostokąty do tego przyprowadzić, aby miały ieden bok równy w obudwóch; przeto można zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcey Figurom prostokreślnym podanym.

104. *Twierdz:* 5. W jakimkolwiek Prostokącie, poprowadziwszy przekątną, przez iey punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków prostokąta, będą równe w powierzchniach dwa prostokąty, przez te równoodległe zrobione, a stykaiące się w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątney poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Prostokąty HEGD, FEIB będą równe w powierzchniach. Táb. VI. *Fig.* 4.

Dowodz: Tróykąty ACD, CAB, są równe. Pierwszy składa się z Tróykątów CEG, EAH, i z Prostokąta HEGD. Drugi składa się z Tróykątów ECF, AEI, i z Prostokąta FEIB. A że Tróykąt CEG, równy iest Tróykątowi ECF, a Tróykąt EAH, równy Tróykątowi AEI; więc i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi EFIB.

Twierdzenia podobnego poprzedzaiącemu, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobem dowieśdź można.

105. *Zagadn:* 5. Dany Prostokąt zamienić na inny teyże samey powierzchni, któryby miał za bok, liniią daną.

Táb. VI. *Fig.* 5. Niech będzie Prostokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby liniiá daná za bok służyła.

Rozwiąz: Pociągniymy daley bok AB, aż do E, tak, aby liniiá BE. równá była linii daney. Dopełniymy Prostokąta BEFC, i poprowádźmy przekątną FB, którąby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potem FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równe są te dwa Prostokąty, można okázać

zać podobnym iak w ostatnim twierdzéniu sposobém.

106. *Uwága* 1. Aby dodadź dwa Prostokąty maiącé boki odmiénné; trzeba naprzód iedén z tych prostokątów zamiénić na inny równéy z nim powiérzchni, i któryby miał bok iedén równy bokowi prostokąta drugiégo nie zamiénianégo. Wziąwszy potém za wysokość, tén bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiénnych; zrobi się Prostokąt równy co do powiérzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwága* 2. Gdyby Prostokąty dané były Kwadratami, a Prostokąt równy ich summie miał też bydź Kwadratém; poprzedzaiącé wiadomości nie dosyć byłyby na rozwiązanié tego zagádniéniá. Niżéy obaczymy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obácz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystósowanié.* Nie powtárzá się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzéniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażoné. Przystósowanié teraźnieyszé sciągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Tróykątów, wyrážaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby

Aby doyśdź powierzchni Czworokąta, którego przekątna i prostopadła od wierzchołku kąta iey przeciwnego spuszczona, w liczbach iest dana; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obudwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia iego byłaby równa Prostokątowi maiącemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Tab. VI. Fig. 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochylokątny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia iego będzie $20 \times 37. = 740.$ łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378.}{27.} = 14.$ łokci.

3. Niech będzie powierzchnia Równoległoboku $ABCD = 544.$ łokci kwadratowych; wysokość $DE = 17.$ łokci. Podstawa AB, będzie $= \frac{544}{17} = 32.$ łokci.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stóp 1. cál. 10. toiest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stóp. 1. cál: 8. toiest $14.\frac{5}{6}$. łokci; powierzchniá będzie $14.\frac{5}{6}$. razy $23.\frac{11}{12}=354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr:=354. łok: kw: 3. stóp. 8. cál:

5. Niech powierzchniá Równoległoboku ABCD będzie=8433. sznur: Kwad: 72. pręt: kw:=8433. 72. sznur: kwad: podstawa AB=153. sznur: 9. pręt:=153. 9. sznur: wysokość DE, będzie $=\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ $=54,\ 8.$ sznur =54 sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchniá Równoległoboku ABCD, będzie=315, 3, 58. (Ł. K. St: Kw. Cal: Kw:) $=315.\frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE = 15. Łok. 1. St: 10. Cál: $=15.\frac{11}{12}$ Łok: Łok: podstawa będzie $=\frac{90965.}{4584.}$ = 19. Łok. Stóp: 1. $8.\frac{49}{191}$. Cál:

7. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB,=28 łokci, a wysokość CD=16. łokci. Powierzchniá iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych czyli $=\frac{28\times16.}{2}=28\times8.=224.$ Łok: kw: 8. Táb. VII. *Fig.* 1.

8. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC=156. stóp. kw: a podstawa AB=24. stóp. wysokość CD, będzie $=\frac{156}{\frac{1}{2}\times 24.}=\frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.}=13.$ stóp.

9. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC=195. Ł. kw: a wysokość CD=15. łokci. Podstawa AB będzie $=\frac{195}{\frac{1}{2}\times 15}=\frac{390}{15.}=26.$ Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB= 12 pręt:, 2 łok:, 4. cal: $=12.\frac{5}{18.}$ pręt: Wysokość$=7.\frac{5}{6}$ pręt: powiérzchniá będzie $=7.\frac{5}{6.}\times 6.\frac{5}{36.}=48.\frac{19}{216.}$ pręt: kw: =48. pręt: kw: 4. łok: kw: 3. stóp. 114. cál: kw:

11. Niech będzie powiérzchnia Tróykąta ABC = 25. ł. kw: 32. cal: kw: $=25\frac{1}{8}$ ło: kw: podstawa AB= 9. Ł. 2. cal: 8. linii $=9.\frac{1}{9}$ Łokci. wysokość CD będzie $=\frac{451}{82.}=5.$ ł. 1. sto:

12. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta=21. szn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość

kość CD=5. szn: 8. pręt: podstawa AB. będzie$=\frac{21,\ 17.}{2,\ 9.}$ albo $\frac{42,\ 34.}{5,\ 8.}$=7, 3. szn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległe boki AB, CD; - bok AB=35. łok. Táb. VII. *Fig.* 2.

bok CD=17. łok.

A zatém summa ich=52.
Wysokość DE = 14.
Powierzchniá tego Czworokąta będzie $=\frac{14\times 52.}{2.}$=7×52, albo 14.×26.=364. ł.kw:

14. Aby powiérzchniá takiégo Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którégo boki dwa równoległé są:

ieden AB=23. cál;
drugi CD=11.

A zatém summa=34.
trzeba mu dadź wysokość$=\frac{255}{17.}=\frac{510}{34.}=$ 15. cal.

15. Aby zaś powiérzchniá takiégo Czworokąta zawierała 325 Stóp: kw: gdy podstawa AB=31. stóp, a wysokość ED=13. trzeba, aby summa boków równoodległych była$=\frac{325}{\frac{1}{2}\times 13.}=\frac{650}{13.}$=50. stóp. A że bok AB=31. stóp. więc CD będzie=19. stóp.

16.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB =	20. pr:	4. ło.	1. st.	6. cal.
CD =	13.	5.	1.	4.
A zatém summa =	34.	2.	1.	10. =

$34.\frac{7}{18}$ pręt:

Wysokość DE = 9. 5. 1. 8. = $9.\frac{7}{19}$.

Powiérzchnia będzie $= 9.\frac{7}{9}. \times 17.\frac{7}{36} =$ $168.\frac{10}{81}$ pręt: kw: 168. pręt: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Táb. VII. Fig. 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątna DB = 86. łokci; prostopadłe zaś do niéy spuszczoné, - - - AE = 39.
- - - CF = 25.
A zatém ich summa AE + CF = 64. łok: Powiérzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{64 \times 86.}{2} = 32. \times 86.$ albo $64. \times 43. = 2752.$ łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątna AB = 26. szn: 8. pręt: 6. łok: $= 26.\frac{22}{25}.$ szn: Prostopadłe: AE = 13. szn: 7. pręt: 5. łok:

	CF = 11.	9.	6. $\frac{1}{2}$.
A zatém	AF + CF = 25.	7.	4.

$= 25.\frac{113}{150}.$ sznur:

Powiérzchnia Czworokąta ABCD będzie $= 25.\frac{113}{150}. \times 13.\frac{11}{25}. = 346.\frac{78}{628}.$ szn: kw:

19.

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok: Táb. VII. *Fig.* 4.

Przekątné: { AC = 79. CE = 81.

Prostopadłé: { CH = 49. BF = 42. DG = 39.

Znáydziémy Powiérzchnie Tróykątów:

{ AEC = 49×64. = 3136. łok: kw: ABC = 21×79. = 1659. EDC = $\frac{39 \times 81.}{2}$ = 1579. $\frac{1}{2}$.

A zatém Powiérzchnia Pięciokąta ABCDE będzie = 6374. $\frac{1}{2}$. ło: kw:

20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą Táb. VII. *Fig.* 5.

Przekątné. { AC = 200. łok: AE = 125.

Prostopadłé (BG = 23. DH = 80. $\frac{1}{2}$.

{ DI = 64. $\frac{3}{4}$. FK = 42.

A zatém BG+DH = 103. $\frac{1}{2}$. łok:

DI+FK = 106. $\frac{3}{4}$.

Znáydziémy Powiérzchnie Czworokątów:

{ ABCD = 103. $\frac{1}{2}$. ×100. = 10350. ł. kw: ADEF = 53. $\frac{3}{8}$. ×125. = 6671. $\frac{7}{8}$.

Po-

Powiérzchniá tedy całégo Sześciokąta będzie = 17021.$\frac{7}{8}$. łok: kw:
Inaczéy następuiącym sposobém znaléźć można Powiérzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Táb. VII. *Fig. 6.* Niech będzie

		szn:	pręt;	łok:
	bok AB =	20.	0.	0.
Równoodległé:	FG =	23.	7.	3.$\frac{1}{8}$.
	CH =	23.	2.	2.$\frac{13}{16}$.
	EI =	12.	2.	2.$\frac{3}{16}$. = 12.$\frac{11}{48}$. Sz:kw.
Części prostopadłéy DN.	DK =	2.	4.	7.$\frac{7}{24}$. = 2.$\frac{179}{360}$.
	KL =	4.	6.	6.$\frac{1}{4}$. = 4.$\frac{41}{60}$.
	LM =	1.	0.	3.$\frac{8}{4}$. = 1.$\frac{1}{20}$.
	MN =	7.	8.	5.$\frac{5}{6}$. = 7.$\frac{79}{90}$.

A zatém AB+FG = 43. 7. 3.$\frac{1}{8}$. = 43.$\frac{89}{20}$.
FG+CH = 46. 9. 5.$\frac{15}{16}$. = 46.$\frac{47}{48}$.
CH+EI = 35. 4. 5. = 35.$\frac{5}{17}$.

Więc Tróykąt DEI = 1$\frac{179}{720}$. × 12$\frac{11}{48}$. =
15.$\frac{9313}{34560}$. szn: kw:

Czwo-

Czworokąty. $\begin{cases} EICH = 2,\frac{41}{120} \times 35.\frac{7}{15} = 83.\frac{23}{450}. \\ CHFG = 1.\frac{1}{20} \times 23.\frac{47}{96} = 24.\frac{85}{128}. \end{cases}$

$\begin{cases} ABGF = 3.\frac{169}{180} \times 43.\frac{89}{120} = 172.\frac{6341}{21600} \end{cases}$

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF $= 295\frac{641}{2304}$.

21. Niech będzie Siedmiokat ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znalezliśmy toiest: Tab. VIII. Fig. 1.

Części przekątnéy AD: $\begin{cases} AH = 32\frac{2}{3} \text{ stopy} \\ HI = 35. \end{cases}$ $\begin{cases} IK = 15.\frac{1}{3}. \\ KL = 81.\frac{5}{6}. \end{cases}$ $\begin{cases} LM = 11.\frac{5}{6}. \\ MD = 13.\frac{1}{3}. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} GH = 78.\frac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} BI = 56.\frac{1}{3}. \\ FK = 64. \end{cases}$ $\begin{cases} EL = 86.\frac{1}{3}. \\ CM = 45.\frac{1}{6}. \end{cases}$

stóp: kw:

Będą

Będą tedy Tróykąty:

$AHG = 16.\frac{1}{3}. \times 78.\frac{1}{2}. = 1282.\frac{1}{6}.$

$ABI = 28.\frac{1}{6}. \times 67.\frac{1}{3}. = 1905.\frac{17}{18}$

czworokąty:

$DLE = 43.\frac{1}{6}. \times 25.\frac{1}{6}. = 1086.\frac{13}{36}.$

$CMD = 6.\frac{2}{3}. \times 45.\frac{5}{6}. = 305.\frac{5}{9}.$

$HKFG = 25.\frac{1}{6}. \times 142.\frac{1}{2}. = 3588.\frac{1}{4}.$

$KLEF = 81.\frac{5}{6}. \times 75.\frac{1}{6}. = 6151.\frac{5}{36}.$

$BCMI = 109. \times 51.\frac{1}{12}. = 5568.\frac{1}{12}.$

A zatém cały Siedmiokąt ABCDEFG = $19885.\frac{1}{2}.$ stóp: kw:

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁÓW NASTĘPUIĄCYCH

O podniesiéniu liczby do Kwadratu i wyciągniéniu z niéy piérwiástku kwadratowégo.

Lubo nauka, która się tu wykładać będzie, ma częsté używanié w wyższych rachunkach; bardziéy iednak iest potrzebná w Geometryi. W następuiących Rozdziałach, różné zdarzą się użycia iéy okoliczności. Tam fundaménta, na których się zasádzá, iaśniéy zrozumiané będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okázané zwłá-

zwłászcza, gdy ieszcze algiebra uczniom iest nieznaiomá.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; iestto ta sama liczba przez siebie rozmnożoná. Okázać to možná z Geometryi, w któréy aby znaléźć pole Kwadratu; trzeba rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.
I ták dziewięciu liczb piérwszych:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
1. 4 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. — Kwadraty są:

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. — Liczb:
100. 400. 900. 1 600. 2 500 3 600. 4 900. 6 400. 8 100 — Kwadraty są:

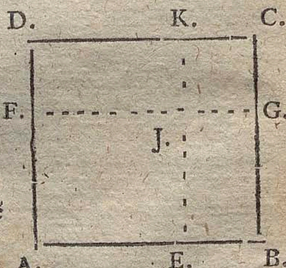
1 000. 2 000. 3 000 9 000. — Tych téż
1 000 000. 4 000 000. 9 000 000. 81 000 000. — Kwadraty będą.

110. Stąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, składáią się z kwadratu téyże saméy cyfry, i z tylé dwoie następuiących zerów, ilé ich było w téy liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży się naprzód 7. przez 7. toiest robi się Kwadrat z 7. potém mnoży się 30. przez 7. daléy 7. przez 30. albo drugi ráz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30. przez 30. toiest bierze się Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożoná 1369. kwadratém trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydziestu,

stu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogólna ściągaiącá się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważám iak złożona z 1. i z 4. kwadrat iey może bydź uważany, iakby się fkładáł z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwszá 1. iest kwadratém z 1. drugá 8. iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzeciá 16. iest kwadratem z 4. Jakoż summa tych trzech liczb 1. 8. 16. iest: 25. a 25. iest kwadratém z 5. Gdybyśmy uważali 5. iako zbiór z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5. bráłby się tém samém za summę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która summa iest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratém z 2. liczba 12. byłaby z rozmnożéniá dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratém z 3.



Tož samo widocznie pokázać się może sposobém Geometrycznym.

Niech liniiá AB będzie na mieyscé liczby iakiey fkłádaiącey się z tylu iedności, ilé pewnych części zamyká w sobie táż liniiá AB. Linii tey części: AE,

AE, EB, niech zastępuią części dwie, które tę liczbę składaią: zróbmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie linii FG, i EK, równoodległe od boków kwadratu; i przecinaiące się w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii teyże AB. Prostokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, toiest z części iedney, linii AB i z części drugiey.

112. Wygodna rzecz iest, liczbę, którey kwadratu szukamy, rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, toiest na 20. i na 4.

Będzie	1. 400.	kwadrat z dziesiątków.
	2. 160.	liczba dwa razy rozmnożona z dziesiątków przez iedności.
	3. 16.	Kwadrat z iedności.
Summa - -	576.	Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

	1. 900.	Kwadrat z 30.
	2. 360.	dwa razy 30. przez 6. rozmnożone.
	3. 36.	Kwadrat z 6.
Summa - -	1296.	Kwadrat 36.

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1.	90000.	Kwadrat z 300.
2.	12000.	Dwa razy 300. przez 20.
3.	400.	Kwadrat z 20.
4.	2560.	Dwa razy 320. przez 4.
5.	16.	Kwadrat z 4.
Summa - - -	104976.	Kwadrat z 324.

Przykład. 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1.	16000000.	Kwadrat z 4000.
2.	4800000.	Dwa razy 4000. przez 600.
3.	360000.	Kwadrat z 600.
4.	736000.	Dwa razy 4600. przez 80.
5.	6400.	Kwadrat z 80.
6.	65520.	Dwa razy 4680. przez 7.
7.	- - 49.	Kwadraty z 7.
Summa - - -	21967969.	Kwadrat z 4687.

113. *Uwaga* 1. Postrzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składaiąca po części kwadrat cały, ma iednem zero mniey, niżeli ta, która ią poprzedziła; a zatem cyfra iedna w każdey liczbie niższey występuie bardziey ku prawey ręce, niż w tey, która iest nad nią.

Wi-

Widzimy zatém, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry samé tym sposobem iedné pod drugiémi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziéy wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiém szłyby samé cyfry.

16.
48.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21 967 969.

2. W piérwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszcza się zerów sześć, a zatém 16. znaczy 16. milliionów, toiest Kwadrat z 4000. czyli z piérwszego po lewéy ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszczá się zerów pięć, a zatém 48. znaczy 4. milliiony 8. kroć stotysięcy, i dlá tego 4. piszą się pod iednościami milliionów, a 8. występuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożeniá piérwszégo po lewéy ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, téyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszczá się zerów cztéry, a zatem 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dziesiątków tysięcy, i dlá tego 3. piszą się pod stuma tysiącćw, a 6. wy-

stępuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewéy ręce znaku 6. liczby 4687. W czwártym rzędzie opuszczá się zerów trzy, a zatem 736. znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy: i dlá tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożéniá dwóch piérwszych po lewéy ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak téyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowém liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, toiest zaczynaiąc od 49; w piérwszym rzędzie, piérwszá po prawéy ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki: w trzecim rzędzie 4. znaczy sta: a w czwártym rzędzie 6. znaczy tysiące, i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w piérwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawá iéy cyfra 9. náybardziéy występuie. Trzeciá w tym porządku liczba 64. iest kwadratém z dziesiątków 8, i przeto prawá iéy cyfra 4. iako znacząca sta, mniéy występuie, niżeli obiedwie cyfry 49. kwadratu z samych iedności. Piątá w porządku liczba 36. iest kwadratém ze stów 6: i przeto prawá iéy cyfra 6. iako znacząca dziesiątki tysiąców, má przed sobą kwadraty z dziesiątków i z iedności. Na koniec siódmá i náywyższá

liczba

liczba 16. iest kwadratém z tysiąców 4. i przeto prawá iéy cyfra 6. má przed sobą kwadraty ze stów, dziesiątków i iedności. W summie więc 21,967,969. na mieyscach nie párzystych, od prawéy ręki rachuiąc kończyć się będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których się składá cały kwadrat: to iest kwadrat z iedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnié po prawéy ręce 9. napisané: kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugié 9; kwadrat ze stów tam, gdzie iest 6; kwadrat z tysiąców, gdzie 1.

5. Dlá podobnéy przyczyny w summie téyże 21 967 969. kwadrat wyrážaiący (rachuiąc zawsze od prawéy ręki) na mieyscach párzystych, drugiém, czwártém, szóstém i t. d. kończyć się będą liczby pochodzącé z rozmnożéniá poiedyńczych znaków, z których kwadrat urósł, przez té wszystkié, któré ié poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziéy obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym, co wyżey, porządkiém części ich układáiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mámy liczbę iaką kwadratową, możémy doyśdź z iak wielu znaków liczebnych przéz siébie rozmnożonych urósł tén kwadrat: toiest, możémy doyśdź wielości znaków pier-

piérwiástku kwadratowégo. Po Łacinie taki piérwiástek zowié się (*Radix quadrata.*) Doydziémy zaś tego, oddzielaiąc kréskami albo kropkami od prawéy ręki zacząwszy po dwa znaki liczebné. Liczba takich oddziałów pokáże wielość znaków liczebnych piérwiástku. Naprzykłád liczba 576, będzie miała dwa oddziáły, które tak oznáczám 5, 76. a zatém piérwiástek iéy z dwóch się skłádá znaków. Piérwiástek téy liczby: 10,49,76. będzie miáł trzy znaki liczebné, bo w niéy trzy oddziały zrobić możná. Piérwiástek liczby 21 967 969. mieć będzie cztéry znaki, bo cztéry także w nim oddziáły uczynić możná, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nie párzystych liczby kwadratowéy, kończą się kwadraty znaków poiedynczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebné w kwadracie bydź nie párzysté; więc w takim razie, w piérwszym zaráz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleźć możná znak piérwszy piérwiástku tegoż kwadratu: a zatém oddzielaiąc kréskami co dwie liczby, od prawéy ręki do lewéy, na ostątni oddziáł, może tylko przypaśdź znak iedén liczebny. Tak, iakeśmy wyżéy widzieli w tym kwadracie 5,76.

PRZY-

PRZYKŁADY.

116. Niechby z tey samey liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiastku, toiest znak dziesiątków, i znak iedności. Pierwszy znak pierwiastku taki bydz powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. stów: taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, którego pierwiastek 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400. pierwszego tego znaku pierwiastkowego 20, odiąwszy od 576. zostanie 176. Ta reszta pozostała powinna ieszcze zamykać w sobie drugi znak pierwiastku rozmnożony przez pierwszy 20, dwa razy wzięty, i nad to kwadrat tegoż drugiego znaku: więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, toiest przez 40. podzielimy resztę 176; wieloraz pokaże drugi znak pierwiastku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160, odiąwszy od 176. zostanie 16. W tey reszcie 16. znaydować się ieszcze powinien kwadrat znaku pierwiastkowego iedności 4. toiest 16. a że się znayduie zupełnie; więc cały pierwiastek kwadratu 576. będzie 24.

Wzór działaniá.

5,76|20.
4 00 kwadrat z 20.
40| 176|4.
| 160 z rozmnożéniá 40 przez 4.
16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.
0.

Tymże sposobém wyciągnąć możná piérwiástek kwadratowy z téy liczby 144.

Wzór działaniá.

1,44|10.
1 00 kwadrat z 10.
20| 44 |2
| 40 z rozmnożéniá 20. przez 2.
4. Reszta
4. Kwadrat z 2.
0.

Niechby potrzeba wyciągnąć piérwiástek, z kwadratu: 692224.

Oddzieliwszy, iak wyżéy, kréskami co dwie liczby od prawéy ręki, będzie trzy oddziáłów, a zatém i trzy znaki w piérwiáſtku. Kwadrat náybliżéy przystępuiący do 69. iest 64, ktorégo piérwiástek iest 8; więc 8 stów, będzie znakiém piérwszym piérwiáſtku. Odiąwszy kwadrat 8. ſtów, toiest 640 000. od 692 224. zostanie 52 224.

Ta

Ta reszta powinna zamykać pierwszy znak 800 pierwiastku dwa razy wzięty, przez drugi znak dziesiątków rozmnożony, i kwadrat drugiégo znaku pierwiástku: powinná ieszcze zamykać dwa te pierwsze znaki stów i dziesiatków rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. W szczególności zaś mówiąc, powinná zamykać 800. dwa razy wzięté, toiest 1600. rozmnożoné przez znak dziesiątków którégo szukámy. Podzieliwszy tedy 52 224, przez 1 600. znáydziémy na wieloráz 30, albo 3. dziesiątki: a zatém 3 dziesiątki będą znakiém drugim Pierwiástku. 1 600. rozmnożoné przez 30. czynią 48 000, któré od 52 224 odiąwszy, zostanie 4 224. Ta reszta má ieszcze zamykać kwadrat z 30, toiest 900, któré 900. od 4 224. odiąwszy, zostanie 3 324.

Ta reszta powinná zamykać część pierwiástku znalezioną 830, dwa razy wziętą, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiástku, i ieszcze zamykać powinná kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3 324. przez 1 660. toiest przez 830. dwa razy wzięté, a wieloráz 2. będzie znakiém iedności pierwiástku. Przez té 2. rozmnożywszy 1 660, i liczbę rożmnożoną: 3 320. odiąwszy od 3324. zostanie 4, która to reszta iest kwadratém z 2. iedności. Cały więc pierwiástek kwadratu: 692 224. będzie 832.

Wzór

Wzór działania.

```
      692 224.|800
      640 000
I 600.| 52 224|  30
        48 000
         4 224
           900
I 600|  3 324|2
        3 320
            4
            4
            0
```

Trzeba iako náywięcéy takich przykładów Uczniom podáwać, nieużywaiąc żádnégo ieszcze skróceniá. Na wzór dwa się następuiące przykłady podaią.

Przykład I.

```
        46,02,26,56|6000.
        36 00 00 00|
12000|10 02 26 56|700.
        8 40 00 00
        1 62 26 56
          49 00 00
13400|1 13 26 56| 80
        1 07 20 00
           6 06 56
             64 00
 13560| 5 42 56|4
        5 42 40
              16
              16
              0.
```

Przykład II.

```
        13,59,39,69|3000
         9 00 00 00
6000| 4 59 39 69|600.
      3 60 00 00
        99 39 69
        36 00 00
 7200|63 39 69|80
      57 60 00|
       5 79 69
         64 00
 7360|5 15 69|7.
      5 15 20
            49
            49
             0
```

117. *Uwaga.* Jako w dzieléniu zwyczayném, tak i w wyciąganiu Piérwiastku kwadratowégo, można się (kto ieszcze nie iest wprawnym) łatwo pomylić w znakach wie orazu. Omyłka w dzieléniu łatwá iest do poprawiéniá, gdy uważać będziémy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożona przez wieloráz odiąć się może od części liczby podzielnéy, którą dzielić przypádá, albo ieżeli reszta nie iest większá od liczby dzielącéy. W wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, (które wychodzi na iedno prawie co i dzielénie w którémby liczba dzieląca co ráz się odmiéniała) możná także omyłkę iakąkolwiek postrzédz podobną, iak przy zwyczáyném dzieléniu; czyniąc uwágę, wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc piérwiástek sposobém wyżéy podanym, dwa się czynią odeymowaniá, toiest: odeymuie się naprzód liczba dzieląca przez część przypadaiącą Piérwiástku rozmnożoná, i powtóré odeymuie się kwadrat téyże części Piérwiástku: więc, gdyby zdarzyło się, że piérwszé tylko odięcié uczynić możná, a drugiégo iuż nié możná; ostrzeżéni tém bylibyśmy, żeśmy wzięli wieloráz bardzo wielki, á zatém zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w piérwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim 6000. mogło się znáydować 700 razy w 4593969: ale nié możnáby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów, i przetośmy w obu-

w obudwóch tych przykładach iednością wieloráz zmnieyszyli.

118. *Piérwszé*. Skrócénié, którégo przy wyciąganiu Piérwiáſtku kwadratowégo użyć można, ieſt w opuszczéniu zerów w liczbie dzielącéy, podzielnéy, i w wielorazie, zachowuiąc iednak cyfróm pozoſtałym té mieysca, któréby zastępować powinny, gdyby zera odcięté nie były.

119. *Powtóré*: Ponieważ ostatnié po prawéy ręce znaki kwadratu podanégo dó wyciąganiá Piérwiáſtku, wcale się nieodmiéniaią, po piérwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebné; zatém do każdego w szczególności odeymowaniá, można té tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypádá liczbę dzielącą przez wieloráz rozmnożoną; zachowuiąc im mieyscé i znaczénié to samo, któré miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecié*. Zamiáſt dwóch odeymowáń, naprzód liczby dzielącéy przez wieloráz rozmnożonéy, potém kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa ſrazém czynić odeymowaniá: kładąc znak znaleziony na wieloráz, nie tylko na zwyczaynéni swoiém mieyscu; ale téż przy końcu liczby dzielącéy, i dopiéro tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez tén znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypádaiących z kwadratu odeymować. Tu

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których, iuż uczniowie wyciągali pierwiaſtek, niecháy użyią tych trzech sposobów ſkróceniá: bo im iuż i działanié będzie łatwieyszé, i lepiéy dokładność tego sposobu ſkroconégo obáczą, porównywaiąc działanié pierwszé z drugiém.

121. Wyciągniymy tym skróconym sposobém pierwiástek kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba kréskami co dwie liczby: iak wyżéy: oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanégo 13,59,39,69. widzimy, że tén kwadrat cztery znaki liczebné mieć będzie w swoim Piérwiástku. Kwadrat náybliższy w piérwszym po prawéy ręce oddziele zawarty, będzie 9, którégo Piérwiástek, 3. znaczący tysiące. Odiąwszy tén kwadrat 9. od 13. zostanie 4. do których przypisáwszy oddział następuiący 59, będzie 459. Podwóymy piérwszy znak Piérwiástku 3. i będzie 6. Té 6, w piérwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7: ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu nié mógłby się potém odiąć, połóżmy tylko 6, na miyscu wielorazu, i przypiszmy ié także do 6. liczby dzielącéy. Rozmnożywszy 66. przez 6. i liczbę rozmnożoną 396, odiąwszy od 459, zostanie 63, do któréy reszty przypiszmy oddział kwadratu następu-

stępuiący 39; i dzielmy daléy 6339, przez dwa znaki Piérwiástku znalezioné, 36, podwoiwszy ié, toiest, przez 72. 72 w 633 znáyduie się razy 8. Napiszmy 8. na wieloráz, i przypiszmy ié do liczby dzielącéy 72. Rozmnożywszy 728, przez 8, będzie 5824, które odiąwszy od 6339. zostanie 515. Dopiszmy do téy reszty, ostatni kwadratu oddziáł 69, i 51569. dzielmy przez podwóyną liczbę znaków Piérwiástku iuż znalezionych 368: toiest, przez 736. 786 w 5156, znáydziémy razy 7. Przypiszmy té 7. do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwszy od 51569 nic nie zostanie: a zatém kwadratu podanégo piérwiástek będzie: 3687.

Wzór działaniá.

```
     13,59,39,69 | 3687.
      9
    ----
   66|45,9
     396
     ------
  728|633,9
      5824
      ------
 7367.|5156,9
       51569
       -----
         0.
```

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesiénié iakiey liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożénié téy liczby przez siebie samę,

samę, czyli rozmnożénié dwóch liczb równych iedney przez drugą kwadrat; więc ułomku iakiégo, będzie ułomek, którego licznik, iest kwadratém licznika tamtego, a mianownik kwadratém mianownika iego. I tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$ kwadrat z $\frac{1}{3}$. iest $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomków $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ są $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$ i t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć piérwiastek kwadratowy z ułomka podanégo, trzeba osobno wyciągnąć go z licznika i z mianownika. I tak Piérwiastki kwadratowé tych ułomków; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t. d. są $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t. d.

123. *Uwaga.* Gdy się trafi wyciągać Piérwiastek kwadratowy z liczby miészanéy, toiest, złożoney z liczby całkowitéy, i z ułomka; trzeba ią piérwéy obrócić na sam ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć piérwiastek z 2. $\frac{1}{4}$. liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$. którégo piérwiastek $\frac{3}{2}$. czyli 1 $\frac{1}{2}$. Liczba też: 2 $\frac{7}{9}$. iest iedno co $\frac{25}{9}$. a zatém piérwiastek iéy $\frac{5}{3}$. czyli: 1 $\frac{2}{3}$. Liczba 10 $\frac{6}{25}$. tylé znaczy co $\frac{256}{25}$. więc piérwiastek iéy: $\frac{16}{5}$. czyli 3 $\frac{1}{5}$.

O

O Jlościach niespółmiernych, i przybliżeniu Pierwiástków tych liczb, które nie są kwadratami.

124. *Uwági.* 1. Niech będzie liczba 2. z ktorey przypada wyciągać Pierwiástek kwadratowy. Pierwiastkiem tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1. iest 1, mniey od 2. a kwadrat z 2, iest 4. więcey od 2. Więc Pierwiástek z 2, będzie między 1. i 2, a zatem będzie złożonym z jedności, i z ułomka, toiest: będzie liczbą mieszaną, którą na sam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym Pierwiástkiem z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równał się 2; a zatem aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaléźćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w sobie zamykał inny kwadrat: aże to iest nie podobna, zaraz się pokaże.

Każda liczba kończyć się musi na ieden z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczey kończyć się nie może, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiero wyrażonych, toiest na:

1,

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.
czyli krócéy, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoioné nié mogą się inaczéy kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratów ostatnié, podwoioné, toiest, na: 2,8,8,2,0,0, czyli krócéy na: 2,8,0. A że piérwszé zakończéniá na, 2,8, nie są zakończéniami kwadratów; więc kwadraty podwoioné, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, nié mogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończoná iest na iedno zero, toiest ieżeli iedén lub więcéy dziesiątków w sobie zupełnie zamyká: kwadrat iéy zamykać będzie takąż liczbę stów, a zatém kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącéy się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50: więc tak podwoiony nie będzie kwadratém.

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na iedén z dziewięciu piérwszych znaków: 1,2,3,4,5,6, 7,8,9: a kwadrat iéy 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś tén dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a piérwiástek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy piérwiástek liczby zakończonéy na iedén z tych trzech znaków: 2,8,0;

który to oſtatni pierwiáſtek wyciągniony bydź nie może, iakośmy iuż okázali. Tego samego rozumowaniá użyć można gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w szczególności mówiąc, Pierwiástek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź nie może.

126. To Dowodzenie ſtósowane bydź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. I tak nie można wyciągnąć Pierwiáſtku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32. 42, 52, 62. i t. d. czyli to w liczbach cáłkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach, mieszanych.

127. Podobnie dowieśdź można, że niepodobná znaleźć pierwiástek kwadratowy liczby 3. ani żádney inney na 3. kończącey się. Tym, co wyżey sposobem dowodzi się niepodobność wyciągnieniá Pierwiaſtku kwadratowego z liczb kończących się na 5, 7, i t. d: a ſtąd możnaby ułożyć Táblicę bardzo obszerną liczb takich, których Pierwiáſtki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łámanych, zupełnie wyciągnione bydź nie mogą.

128. Moznáby iednak i ogólnie dowieśdź, że wszystkie liczby cáłkowite, które nie maią Pierwiáſtku kwadratowe-

go

go w liczbach całkowitych; mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *pierwszémi* iedna względém drugiéy, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty pierwszémi też będą iedén względem drugiégo; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiastków.

I tak, że liczby 2, i 3, są między sobą *pierwszémi*; pierwszémi są także między sobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. są między sobą pierwszémi: podobnież pierwszémi bądą i ich kwadraty 9. 25, Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby są pierwszémi między sobą, ich kwadraty nie będą wielokrotné iedén drugiégo, toiest: iedén kwadrat nie będzie zupełnie w sobie zamykał drugiégo.

Niech będzie liczba iaká całkowitá, któréy nié można mieć Pierwiastku kwadratowégo w liczbach całkowitych. Gdyby tén Pierwiastek można zupełnie okázać w liczbie mieszanéy; ta liczba miészaná, dałaby się obrócić na sám ułomek, a ułomek tén możnaby przywieśdź do náyprościeyszych wyrazów. Ale, aby ténże ułomek wyrążał zupełny Pierwiastek; trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatém aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od

dzielnika iego, co ieſt nie podobná: więc, gdy liczbie iakiéy całkowitéy, nié można zupełnie znaléźć piérwiáſtku kwadratowégo w liczbie całkowitéy: nié można go też znaléźć ani w ułomku.

129. Są więc takié niektóré Ilości (*Quantitates*) któré w liczbach dokładnie bydź wyrażoné nié mogą, ani nawet wyrazić można, iak się maią do iedności. Takié są té Ilości, któré przez siebie samé rozmnożoné, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (Jncommensurabiles, *albo* Jrrationales) piszą się naſtępuiącym sposobém. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. i t. d. Znak ten $\sqrt{}$, czytá się *Piérwiáſtek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{2}$, Piérwiáſtek dwóch, $\sqrt{3}$, Piérwiástek trzech, i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nié można; przydaię zaráz, że ich dokładnie wyrazić nié można w liczbach; bo w jnny sposób można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawsze naznaczyć dwie linie, któréby się miały między sobą, iak 1, do Piérwiáſtku kwadratowégo liczby podanéy. I tak Przekątna kwadratu, má się do boku iednégo, iak się má Piérwiáſtek kwadratowy z 2, do 1. albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wysokość także Tróykąta równobocznégo, tak się má do połowy Podstawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131. Lubo w liczbach nié można dokładnie wyrazić Ilości niespołmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwéy, i uchybiénié zmniéyszyć tylé, ilé zechcémy. Sposób do tego náysnadnieyszy ieſt przez użycié znaków *Dziesiątnych* do wyrażéniá takich Ilości.

Niech będzie podaná liczba 2, aby wyciągnąć z niéy Piérwiáſtek kwadratowy przez *przybliżénié* (per approximationem.)

Gdyby liczba podaná była razy 100, 10000. 1000000, i t. d. większá, iéy piérwiáſtek byłby też większy razy 10, 100, 1000 i t.d. takdalece, że wyciągnąwszy piérwiáſtek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby piérwiáſtek tén dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto Piérwiáſtek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząſtek tysiącznych, znáydzie się wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Piérwiáſtek náybliższy z liczby 2000000 wyciągniąny ieſt: 1414. a piérwiáſtek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. ieſt, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. ieſt 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór

Wzór działania.

```
        2,00,00,00|1,414
        1
   24|10,0
       9 6
  281.| 40,0
        28 1
  2824|11 90,0
       11 29, 6.
          60 4.
```

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziéy przybliżyć do prawdziwego, tén Piérwiastek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$. nie było uchybienia; trzebaby ieszcze dwa zera przydadź, aby mieć iednym znakiém więcéy w pierwiastku.

132. Dla sprawdzenia, czyliśmy w cząstce $\frac{1}{1000}$. nie uchybili, można położyć zamiast piérwiastku znalezionégo 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prętko wyciągnąć można z liczby piérwiastek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposób tén zasadza się na tém, że ieżeli liczba iest złożona z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielka względém drugiéy; kwadrat téy liczby

by będzie prawie złożony z kwadratu części większéy, i z podwoionego rozmnożenia części pierwszéy przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyszéy, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. I tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzieloney na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, toiest kwadratowi z 10, przydawszy 10. przez 2 rozmnożone, toiest, 20, i kwadrat części mnieyszéy: 1; a choćby ten ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie stąd, że maiąc liczbę, z którey przypada wyciągać Pierwiastek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga mała, ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy z niewielkiem uchybieniem i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiey, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloraz wypadnie, trzeba przydadź do wielkiey części, gdy liczba podana będzie większa od kwadratu części wielkiey; albo odiąć od części wielkiey, gdy kwadrat iey większy będzie od liczby podaney.

Niech będzie podana do wyciągnienia Pierwiastku, liczba 5. Pierwiastek iey naybliższy w liczbie całkowitey, iest 2.

któ-

którégo kwadrat 4. Różnica między tym kwadratém i 5, iest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięté, toiest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatém Pierwiástek liczby 5. nie wielé uchybiony, będzie 2, $\frac{1}{4}$. albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$. iest $\frac{81}{16}$. czyli 5. $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$. przez $\frac{9}{4}$. dwa razy wzięté, toiest przez $\frac{9}{2}$. wypadnie na wieloráz $\frac{1}{72}$. który odiąwszy od $\frac{9}{4}$. czyli od 2, $\frac{1}{4}$. zostanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$. i tén będzie ieszcze bardziéy przybliżaiący się do práwdziwego pierwiástek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrát z $\frac{161}{72}$ iest: $\frac{25921}{5184}$. czyli 5 $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżénié z tém, któréśmy mieli w ułomkach dziesiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$. na ułomek dziesiątny, a znáydziémy: 2,2361. i t.d. Piérwiástek zaś liczby 5, w ułomku dziesiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatém różnica liczb w tém dwoiakiém postępowaniu, wydałaby się dopiéro w częściach dziesięć tysiącznych.

136. W piérwszém postępowaniu, kładzie się zamiást liczby podanéy, ułomek ze wszystkiém iéy równy, którégo dzielnik iest kwadratém z 10, z 100,

z 1000. i t. d. Naprzykład zamiást 2, pisze się $\frac{200}{100}. \frac{20000}{10000}. \frac{2000000}{1000000}$. W drugiém postępowaniu, szukámy ułomka bardzo blizko równégo liczbie podanéy. Którégo tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratém. I tak liczba 2, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{9}{4}$. $\frac{49}{25}$. $\frac{100}{49}$. $\frac{280}{144}$. i t. d. Liczba 3, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{49}{16}$. $\frac{361}{121}$. i t.d. Znáyduiémy zaś té ułómki, dwoiąc, troiąc i t.d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t.d. i uważaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowémi nie będzie którá tuż zbliżaiącá się do liczby podwoionéy, potroionéy, i t.d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4, czyni 8, a blizko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie rowná się $\frac{8}{4}$. a nie daleko iest od $\frac{9}{4}$. a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko $\frac{3}{2}$. Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowná się $\frac{50}{25}$. a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$; a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko: $\frac{7}{5}$. Możná potém poprawić, gdy zechcémy piérwszé té przybliżéniá, postępuiąc sobie tak, iak się wyżéy powiedziało.

Dosyć będzie tém czasém na téy początkowéy wiadomości względém przybliżaniá Piérwiaſtków nie spółmiernych. Rzecz ta ſtała się materyą wielkiéy wági, gdy sławni Matematycy *Euler* i de la *Grange*, głę-

głębiey ią brać poczęli, i rozmaite, iey przystósowania czynic. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{1}{3}$, z którego trzeba wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Zamiast cobyśmy mieli osobno ten Pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potem Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodniey będzie ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiastek z licznika 6, a trzecia część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiem ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6}. = 2, 4494$; trzecia tego pierwiastku część iest prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0, 6666666. i t. d.

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiastek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, iest 1. który różni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony toiest przez 2, tę różni-

---

(m) Obacz między innémi Dziéło pod Tytułém: *Introductio ad analysim Infinito. rum* przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry po Francuzku wydané.

różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwszy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zoſtanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, iest $\frac{25}{36}$ który od $\frac{2}{3}$. różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. toiest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zoſtanie $\frac{49}{60}$. J ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiáſtkiem bardzo blizkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$ ieſt. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$ znaczy tyle co $\frac{2400}{3600}$; różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc, aby Pierwiáſtek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczey bydź nie może, licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potem pierwiáſtek z licznika tak rozmnożonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiáſtek.

140 Może się iednak obeyśdź czasem bez mnożenia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samego mianownika; gdy mianownik iuż ieſt kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiáſtek z $\frac{3}{4}$; wyciągniemy go z 3. i podzielimy przez 2; chcąc mieć pierwiáſtek z $\frac{5}{12}$, rozmnożymy 5. i 12. przez 3. a maiąc ſtąd

$\frac{15}{36}$,

$\frac{15}{36}$, wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielimy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, toiest będzie $3\frac{1}{8}$ więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$ będzie $\frac{31}{48}$, kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$. iest $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$. tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatem uchybienie iest tylko w $\frac{1}{2304}$:

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury prostokreślne.

141. DEfin: W tróykącie prostokątnym, bok przeciwny prostému kątowi nazywać będziemy, Liniią *Przeciwprostokątną*, albo iednem słowem, Przeciwprostokątną (Hypothenusa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątney Tróykąta prostokątnego, równa się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoz tróykąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać naprzód potrzeba na Tróykącie Prostokątnym, równo ramiennym, toiest maiącym dwa boki rowne dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątney kwadratu dwa razy iest od tegoż kwadratu większy.

Niech

Niech będzie ABCD, kwadrat; któ- Tab.VIII. Fig. 2.
rego Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE, i BF, równé były AB. Poprowádźmy Liniie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratém przekątnéy AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż cztéry Tróykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą przyſtać do siebie: bo maią wszyſtkié kąty przy B. proſté, i boki przy nich równé: a zatém liniie AC, CE, EF, AF, będą wszyſtkié równé. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, ieſt proſty bo złożony z dwoch kątów pół proſtych: iak naprzykład kąt ACE, złożony ieſt z kątów półproſtych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF ieſt proſtokątém maiącym boki wszyſtkié równé a przeto ieſt kwadratém. Tén kwadrat ACEF, składá się z cztérech Tróykątów, z których każdy przyſtać może do iednégo z dwóch Tróykątów kwadratu ABCD. Że tedy takich Tróykątów ieſt cztéry w kwadracie ACEF, iakich ieſt dwa w kwadracie ABCD, kwadrat więc Przykątnéy AC, ieſt dwa razy większy od kwadratu tego, którego bokiém ieſt ta Przekątná.

143. *Wniosek*: Aby dodadź dwa kwadraty równé, trzeba zrobić Tróykąt proſtokątny równoramiénny, którégo boki przy kącie proſtym byłyby równé, bokowi iednégo z dwóch kwadratów,

tów, a Przeciwprostokątná tego Tróyką-ta, będzie bokiém kwadratu równégo summie dwóch tamtych kwadratów.

Táb. VIII. Fig. 3. Możná ieszcze nim się do ogólnégo dowodzéniá przystąpi, przytoczyć niektóré przypádki szczególné, gdzie trzy boki Tróykąta prostokątnégo będą w liczbach wyrażoné. Obácz na Figurze 3. gdzie trzy boki Tróykąta prostokątnégo, wyrażoné przez liczby: 5, 4, 3. w częściach równych, naprzykład w calach, kwadraty tych liczb są, 25. 16, 9. calów kwadratowych; i piérwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

INNÉ PRZYKŁADY.

Przeciwprostokątné		*Boki.*	
13,	- - -	12	- 5
17,	- - -	15	- 8
25,	- - -	24	- 7.

Dowodzénié ogólné, któré teráz dámy, można obiaśnić na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Táb. VIII. Fig. 4. Niech będą dwa iakiékolwiek kwadraty: ABCD, i AEFG znaydziémy kwadrat równy ich summie w tén sposób. Postáwmy naprzód té kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD, i AG, stykały się, i iednę liniią czyniły DG, Bok

AG

AG mnieyszégo kwadratu, przenieśmy potém na bok AD. większégo kwadratu od D do J. Poprowádźmy liniię IF, IC. Tróykąty proſtokątné IGF, CID. maią boki przyległé kątowi proſtému równé bokóm kwadratów obudwóch. Trzeba więc dowieśdź że kwadrat przeciw proſtokątnéy IF, albo IC, równy ieſt summie kwadratów z GI, GF, albo z DC, i DI. Wyrznąwszy kartę wzdłuż Linii IF, i IC, przyłóżmy, Tróykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC, bok DI, przypadnie na BH, przedłużéniu boku AB, a to z téy przyczyny, że obadwa są kąty proſté D, i B; bok zatém trzeci IC, weźmie położénié HC: będzie więc Tróykąt CBH, równy Tróykątowi GDI. Podobnie i drugiégo Tróykąta IGF, bok IG, przyſtanie zupełnie do boku HE, sobie równégo, ponieważ IG, rowná się AD, AD, równá się AB: a AB. równá się HE: bok GF, przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położénié HF: będzie więc Tróykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z czterech przeciwproſtokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miáł wszystkié kąty proſté, bo kąt na przykład IFH, równá się summie kątów IFE, i EFH, któré równie czynią kąt proſty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Tén więc czworokąt ieſt razém i proſtokątém maiącym wszyſtkié boki równé, a zatém ieſt kwádratém: który to kwadrat rowná się summie dwóch kwadratów podanych, a

zro-

zrobiony ieſt na Przekątnéy Tróykąta proſtokątnégo, maiącégo za boki przyległé kątowi proſtému té samé, które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzénié naſtępuiącé powinno tym iaśniéy bydź wyłożoné; im prościéy ieszcze od piérwszégo tę práwdę okazuie, i więcéy daie do czynięnia dowcipowi. Wielé także użytecznych wnioſków z niego wypływá.

Táb. IX. *Fig.* 1. Niech będzie Tróykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtáwmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE, równy będzie summie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wiérzchołku kąta proſtégo spuśćmy na przeciwproſtokątną AB, proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokázać terάz trzeba, że kwadrat BCHI równy ieſt proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatém obadwa razém kwadraty równé kwadratowi ABDE.

Pociągniymy liniią CD, Tróykąt BDC, będzie połową Równoległoboku proſtokątnégo BDML; bo obadwa maią spólną podſtawę BD, i na téyże saméy równo ódległéy MC, są zakończoné. (94.)

Po-

Pociągniymy liniią AI, Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dlá téyże, co wyżéy, przyczyny: bo obadwa także maią podstawę spólną BI, i obadwa na iednéy równoodległéy AH, są zakończoné.

Jeżeli tedy dowiedziémy, że Tróykąty: ABI, CBD, są równé; iuż tém samém Prostokąt BDML: równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy są równé; to i dwie té rzeczy będą równé.

Té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie: ponieważ bok AB, w jednym, równy iest bokowi BD, w drugim, bo obadwa té boki do iednégo kwadratu należą: bok BI, w jednym, równy także iest bokowi BC w drugim: kąty między témi bokami zawarté: ABI, CBD, składaią się obadwa z kąta prostégo i z kąta ABC; więc té dwa Tróykąty są równé w powiérzchniach; a zatém i kwadrat BCHI, równy będzie Prostokątowi BDML. Tymże samym sposobém dowodzi się, że kwadrat ACFG, równy iest Prostokątowi AEML, toiest, pociągnąwszy linie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC, mogą przystać do siebie, a zatém będą równé: kwadrat więc ACFG, że iest dwa razy większy od Tróykąta BAG, będzie równy Prostokątowi AEML,

dwa razy także, większému od Tróyką-ta EAC. (n)

144. *Wniosek.* Gdy od wierzchołka kąta prostego, w Tróykącie prostokątnym spuszczoná będzie Prostopadłá na przeciw prostokątną; kwadrat z boku iednego tego Tróykąta równy będzie Prostokątowi zrobionemu z przeciwprostokątnéy, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, a przyległego témuż Tróykąta bokowi, ktorego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, toiest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątnéy AB, albo AE. i z odcinkn AL, toiest, Prostokątowi AEML; iako się wyżéy pokazało. Podobnie i kwadrat drugiégo boku BC, toiest BCHI, równy

(n) Sposób postępowaniá w tém dowodzéniu, może służyć za wzór do innych dowodzéń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na częsci, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynioné, nowé podziały, niezawisłé iedné od drugich, i każdy podział w szczególności dowodzony. Liniie nie były razém prowadzoné ale wtedy dopiéro, gdy były potrzebné. Ta ostatniá uwága powinná bydź między innémi na pamięci w dowodzéniu Twiérdzéń złożonych, gdzie gdyby wielé razém liniy prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom, nie dobrze ieszcze w takowé działaniá wprawionym.

równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, toiest, Prostokątowi BDML.

145. *Zagádn:* 1. Maiąc dané dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którégo ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiém kwadratu równégo summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zrobmy kąt prosty, dáwszy mu za iedno ramię bok mnieyszégo kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniém równym bokowi większégo kwadratu, nakréślmy łuk koła, któryby przecinął ramié drugié kąta prostégo: to przecięcié naznaczy długość tego drugiégo ramieniá, z którégo wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dané były równé; rozwiązanié byłoby ieszcze łatwieyszé.

Przystósowanié zagádnieniá, poprzedzaiącégo, do wynaleźieniá innych Kwadratów.

146. Jużeśmy pokázali, że kwadrat Przekątney iest dwa razy większy od

kwadratu, którego iest ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat, znalazłszy naprzód kwadrat podwóyny, możnaby mu przydadź znowu kwadrat poiedynczy, ale też można i ieszcze lepiey tak sobie postąpić: Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu poiedynczego. Zróbmyż więc Tróykąt prostokątny, którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwprostkątną daymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Tróykącie będzie taki, iakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potróyny.

147. *Uwaga.* Tróykąt Prostokatny, którego Przeciwprostkątna iest dwa razy tak wielka, iak iest wielkie ramię iedno kąta prostego, ten mówię, Tróykąt dwa razy iest mnieyszy od Tróykąta równobocznego, którego połową podstawy byłoby ramię iedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością iego: a zatem, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większey od boku tego kwadratu zrobić Tróykąt Równoboczny, a wysokość tego Tróykąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztery razy większy kwadrat-

kwadrat od tego, który ieſt dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego; trzeba przy kącie proſtym poſtawić dwa ramiona: iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwproſtkątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego; trzeba albo dodadź do siebie kwadrat poczworny i podwóyny: albo też kwadrat podwóyny potroić poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Tróykąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu szesć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat siedm razy większy od danego: trzeba dodadź kwadrat poczwórny i potróyny, dáwszy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów a na przeciwproſtkątney kwadrat poſtawiwszy; ten będzie siedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego; trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztery razy pomnożyć, dáwszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; al-

albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na ten koniec Tróykąt prostokątny któremu za ramie iedno przy kącie prostym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwprostkątną, liniią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu osm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego; trzeba mu dadź bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąźć summę kwadratów, podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego; trzeba wziąźć, summę kwadratów, dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak iest podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanaście razy większy od podanego: trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy

razy większy od podanego; trzeba wziąźć summę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego, niż iest kwadrat podany: albo też postawić Tróykąt prostokątny i dadź dwa ramiona: iedno trzy razy, a drugié dwa razy większé od boku kwadratu podanego; przeciwprostkątná oznaczy bok kwadratu trzynáscie razy większégo i t. d.

158. Wniosek z zagádnieniá poprzedzaiącego, ze kwadrat ramieniá iednego przy kącie prostym, równy iest Prostokątowi i z odcinka iey przyległego témuż ramionowi, przez prostopadłą zrobionégo, ten mówię wniosek daie sposób ogólnieyszy, a czasém i prostszy rozwiązaniá zagadnień w przystósowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciw prostkątná iest dwa, trzy, cztéry i t. d. razy tak wielká, iak odcinek przyległy iednému bokowi: prostokąt z tey przeciw prostkątney i z tego odcinka, będzie téż dwa, trzy, cztéry i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samégo odcinka: a zatém i kwadrat boku przyległégo tému odcinkowi będzie téż dwa, trzy, cztéry i t. d. razy, tak wielki, iak kwadrat tego odcinka: co iasno bydź powinno, maiąc w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i następuiących o mierzeniu Prostokątów; a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanie przybrane* (Lemma). (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okręgu koła, poprowadzone będą dwie linie do dwóch końców śrzednicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiema temi liniami będzie prosty.

Táb. IX. *Fig.* 2. Niech będzie AKB, półkole, którego AB, iest śrzedniá. Weźmy iakikolwiek punkt, na przykład K, na okręgu tego półkoła, i poprowádźmy od tego punktu linie AK, BK, do końców śrzednicy. Kąt zrobiony przez te dwie linie iest prosty.

Przygotowanie. Pociągnijmy promień CK.

Dowodz. Tróykąt AKC. iest równoramienny, bo AC; równá się CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokóm stoiące będą równe; toż mówić, i o Tróykącie CKB; a zatem w Tróykącie AKB, kąt przy K, będzie równy summie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proste; więc sám przez się będzie czynił kąt ieden prosty.

160.

(o) Lemma nazywámy podániém przybraném, że nie należy właściwie do tey rzeczy, o którey mowa, i że się przybierá czasém z jnney części Matematyki dlá przysposobiéniá nas do łatwieyszego zrozuміéniá tego, co następuie.

160. *Zagádn:* 2. Znaléźć kwadrat, któryby kilka całé razy, lub więcéy zamykáł w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyká tylé razy w sobie AB, ilé razy kwadrat, którégo szukámy, má w sobie zamykać tén który ieſt dany. Na AC, iako na ſrzednicy nakréślmy półkole. Od punktu B. wyprowádźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą półkole w Punkcie K. Liniia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanému. Táb. IX. *Fig.* 3.

161. *Uwága.* Trzeba tu pokáżać widocznie Uczniom pożyteczność większą i ogólnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki ponieważ w Arytmetyce nié można zupełnie wyciągnąć Piérwiáſtku kwadratowégo z liczb całych które są podwóyné, potróyné, poszoſtné i t. d. innych liczb kwadratowych. J tak nié można, nawet w ułomkach, znaléźć Piérwiáſtku kwadratowégo liczb 2,3,5,6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokázało, znáyduiémy i wyznáczámy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszóſtnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczéniu piérwszych ilości, których kwadraty byłyby podwóyné, potróyné, i t. d. innych kwadratów, nie ieſt w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którégo używámy.

162.

162. *Zagádn:* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

Rozwiąz: Na większy bok prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszégo, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszégo schodził się z końcém iednym boku większégo. Na tymże boku większym, iako na śrzednicy nakreślmy półkole a do końca drugiego boku mnieyszégo nie schodzącégo się z końcém drugim boku większégo wyprowádźmy Prostopadłą, i od punktu przecięciá téyże Prostopadłéy z półkołém, poprowádźmy liniią do tego końca śrzednicy, ktory schodzi się z bokiém mnieyszym Prostokąta. Ta ostatniá liniiá będzie bokiém kwadratu równégo Prostokątowi.

164. *Wniosek.* Widzieliśmy w Rozdziále V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na Prostokąt. Teráz się pokázało, iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat: więc każda Figura Prostokreślná, może bydź i na kwadrat zamienioná.

W Tróykącie maiącym kąt ieden roztwarty, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków: mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnégo kątowi ostrému od summy kwadratów dwóch innych boków w jednymże Tróykącie. Dwa

Dwa następuiące Twierdzénia, pokáżą różnicę w Tróykącie między kwadratém boku tak przeciwnego kątowi roztwartému, iako i przeciwnego kątowi ostrému, i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twierdz:* 2. W Tróykącie maiącym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednego końca boku przeciwnégo kątowi roztwartému, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtégo boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętému Prostokątowi z boku, na który prostopadłá spuszczoná, rozmnożonégo przez odległość od téyże Prostopadłéy, wierzchołka kąta roztwartégo.

Niech będzie Tróykąt: ABC, który má kąt roztwarty przy C, od końca A, boku AB, przeciwnégo tému kątowi: spuśćmy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. Táb. IX. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Na linii BD, zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, równé BC; poprowádźmy przez G, i L, liniie GI, i LC.

Dowodz: Prostokąt FGKL, iest kwadratém z BC: Prostokąt CDIK, iest kwadra-

dratem z CD: a Prostokąty obadwa BCKG, i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równa się summie kwadratów z AD, i z BD, toiest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokatowi z BC, przez CD. A że summa kwadratow z AD, i DC, równa iest kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD był połową, Tróykąta równobocznégo; toiest, niechby liniiá AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA; a sam przez się byłby tylko iego połową. Tén przypádek szczególny można wyrazić w słowach następuiących: *W Tróykącie, którégo kąt roztwarty równá się summie kąta prostégo i trzeciéy części iego; kwadrat boku przeciwnégo kątowi roztwartému, rowny iest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.*

167. *Twiérdz:* 3. W Tróykącie iakimkolwiek uważaiąc iedén kąt ostry, a od końca boku przeciwnégo tému kątowi spuściwszy prostopadłą na iedno ramié

iego

iego; kwadrat tego boku równać się będzie różnicy między summą kwadratów ramión obudwóch kata tego ostrego, i dwa razy wziętym Prostokątém z ramieniá, na które prostopadła iest spuszczoná, i z odległości wierzchółka kąta ostrégo od prostopadłey.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym kąt C iest ostry. Od końca A, boku przeciwnego AB, spuścmy Prostopadła AD, na ramié BC, kata ostrégo. Kwadrat z AB, równy będzie różnicy między summa kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostokątém, ktorégo bokami będą BC, i CD. Tab. IX. Fig. 5.

Przygotowanié. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznáczmy liniie FG, FL, równé DB, i CI rowną CD. Poprowádźmy iescze liniie: DL, IG. Przeciągnîymy DL, i CE do M i N, tak, aby LM, EN równé były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, toiest FGKL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniéy summą dwóch prostokątów: BGIC, i EIKL: albo dodáwszy, i odiąwszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniéy

sum-

summmą Prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summa Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatém kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i z CD, równá się kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD, był połową Tróykąta równobocznégo, a zatém AC, dwa razy większá od CD; w takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątém z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: *W Tróykącie, którégo kąt ieden równá się kątowi prostému, mniey trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramión tegoż kąta, i Prostokątém z tychże ramión.*

169. *Wnioski i Przystósowaniá dwóch Twiérdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Tróykącie kwadrat iednégo boku równy iest summie kwadratów z ramión kąta przeciwnégo, albo większy

szy lub mnieyszy od téy summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Tróykącie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od prostopadłéy spuszczonéy na tenże bok, z wierzchołka kąta iemu przeciwnégo, ten, mówię, dwa razy wzięty Prostokąt, równy iest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratém boku przeciwnégo tému kątowi, toiest, równy będzie summie tych dwóch kwadratów, mniéy kwadratem boku przeciwnégo, gdy kąt iest ostry; a gdy roztwarty, to ten Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnégo, mniéy summą kwadratów z ramion: a zatém ieżeli wiadomé nám są w liczbach boki Tróykątu; doydziémy stąd w liczbach i prostokąta tego podwóynégo: doydziémy i odcinka (*Segmentum*) podstawy, zawartégo między wierzchołkiém kąta, o którym iest rzecz, i prostopadłą. A że kwadrat wysokości Tróykąta, równá się różnicy między kwadratém boku przyległégo odcinkowi, i kwadratém tegoż odcinka; więc doydziémy i wysokości Tróykąta, a zatém i powierzchni iego.

170. *Przykład.* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC, w liczbach oznaczoné:

né: pierwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt 400.

Summa Kwadratów z BC, i AC, ieſt summa z 441. i z 169. toieſt 610.

Ta summa ponieważ ieſt większá, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C. ieſt oſtry.

Różnica między tą summą i kwadratém z AB, ieſt: 210, którá to różnica równá się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącéy długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Tén Proſtokąt poiedynczy wyrazi się więc przez 105. A że BC oznaczoné ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD, toieſt, różnicy między 169. i 251. Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczoné przez 12, Powierzchniá Tróykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD, toieſt, 126.

171. *Przykłád* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121. i 169. toieſt; 290.

Ta

Ta summa poniewáż ieſt mnieyszá od kwadratu z AB; przeto kąt przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratém, i tą summą ieſt, 110: którá to różnica równá się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatém Poiedynczy Proſtokąt będzie=55. A że BC, równá się 11; więc CD, będzie się równać: 5.

Kwadrat z AD, równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD; toieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD będzie=12; a powierzchniá Tróykąta będzie 6. razy 11. toieſt 66. Trzeba na więcéy ieszcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiac po większéy części liczb takich, aby Piérwiáſtki kwadratowé zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*		*Podſtawa*
	51 i 25	-	52, albo 28
	52 i 29	-	69 albo 27
	17 i 39	-	44 albo 38
	68 i 87	-	95 albo 31.

172. *Przestroga 1.* Dlá większéy wygody używać na potém będziémy skróconych wyrażéń, których tu znaczénie wykłádámy.

Znak tén: = wyrážać będzie równość między dwóma ilościami.

Znak: + gdzie iedna liniiá prosto drugą przeciná, wyrážać będzie dodanié iednéy ilości do drugiéy; i wymáwiá się tém słowém: *więcéy* (plus) Naprzykład, 4.+5=9, wymáwiá się, cztéry więcéy piącią, równá się dziewięciom.

Znak: — wyrážać będzie odeymowanié iednéy ilości od drugiéy: i wymáwiá się tém słowém: *mniéy*, (minus). Naprzykład: 7—4=3: wymáwiá się, siedm mniéy cztérema, równá się trzém.

Dlá oznáczéniá rozmnożéniá liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch liniy w Geometryi, używać będziémy znaku: × toiest krzyża ukośnégo. Naprzykład 4×3. znaczy cztéry przez trzy rozmnożoné, AB×CD, znáczy Prostokąt z linii AB i CD: albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielénié oznáczá się tym znakiém, toiest, dwiéma kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielnéy, a przed ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2. podzieloné. Można także dzielénié i sposobém ułomków wyrážać, kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiéy ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobém zwykł się wyrážać AB^2, albo AB^q, częściéy iednak piérwszym. I

I tak pierwsze Twierdzenie można było w ten sposób wyrazić: Táb. IX. Fig. 1.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Szóste $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$ Fig. 4.

Siódme $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$ Fig. 5.

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przypadki, takby razem mogły bydź wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt iest prosty, liniia CD, a zatem i prostokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przestroga* 2. Trzeba ostrzedz Uczniów, aby używaiąc tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stósuiące się do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także ustnie pierwey wyrazić każde Twierdzenie lub Zagádnienie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyraz skráсaiącemi. I owszem lepieyby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu ustnem a iasnem Twierdzeń i Zagádnień im podanych.

ROZDZIÁŁ VII.

O Liniiach stycznych z kołém; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki są między okręgiém, albo za okręgiém.

174. *DEfinicye.* Koła równé są té, których promienié są równé i takié koła przyſtać mogą do siebie.

Gdyby to podanié nie zdáwało się bydź tak oczywiſtém, aby go przypuścić można, za Definicyą; tedy możnáby dowieśdź ié tymże samym sposobém, którym wyłożyliśmy w Rozdziele I. tworzénié się koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równé, obrotém swoim około iednégo i nie poruszonégo końca, nié mogą zrobić, tylko równé dwa koła: albo téż uważaiąc té dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiéy, i iak gdyby obiedwie razém czyniły tén obrot; w takim razie, iakiékolwiek będzie położénié spólné tych dwóch liniy, ponieważ zawsze iedna do drugiéy przyſtaie, więc i té mieysca, które przeyśdź maią w tymże samym czasie, i té, które iuż przeszły w czasach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przyſtałyby do siebie: a zatém i

całé

całé té mieysca, czyli koła, któréby zrobiły, mogłyby téż do siebie przyſtać.

Końce tych dwóch liniy tak się obracaiących, w czasach równych, zrobiłyby łuki równé, a zatém w kołach równych, kąty przy ich śrzodkach równé, zamykaią swémi ramionami łuki równé.

Wzaiémnie, gdy w równych kołach, równé łuki weźmiémy, kąty w śrzodkach tych kół, któré między ramionami swémi zamykaią té łuki, będą równé.

Niech będą dwa łuki równé: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, któré wierzchołki swoié maią w śrzodkach tych kół, i któré zamykaią swémi ramionami té łuki, są téż równé. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równé, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyszy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb: a zatém i łuki DB ab, byłyby równé; ale, że wzięliśmy za równé łuki AB i ab; więc łuki także AB i DB, byłyby równé, co ieſt nie podobná, chyba żeby linii CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do siebie przyſtaiąc. Táb. X. *Fig.* 1.

Część koła zawartą między dwóma promieniami i łukiém, zwać będziémy wycinkiém koła, (Sector Circuli.)

Z tego,

Z tego, co się wyżéy powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki té przystać mogą do siebie, których kąty albo łuki są równe; a wzaiémnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe maią téż i ciénciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach tróykąty równoramienne, złożóne z ciénciwy i z dwóch promiéni, mogą przystać do siebie, dlá równości promiéni, i kątów w śrzodku, które na równych łukach wspiéraią się.

Wzaiémnie, ieżeli w kołach równych ciénciwy są równe; łuki téż równe będą: bo Tróykąty złożone z tych ciénciw, i z promiéni równych, maiąc trzy boki równe, mogą przystać do siebie, i kąty w śrzodku, zrobione przez dwa promiénie będą równe, a zatém i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziémy mieysce zawarte między łukiém i ciénciwą.

Gdy ciénciwa nie iest razém śrzednicą, dzieli koło na dwa odcinki: ieden większy, a drugi mnieyszy od półkoła. Takie dwa odcinki nazywaią się odcinkami *na przemián* (Alterna.)

W dwóch

W dwóch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równé łuki, przyſtać do siebie mogą. Jakož té odcinki są różnicami dwóch wycinków maiących równé łuki, od dwóch Tróykątów, które za podſtawy maią ciénciwy tychże łuków równych.

A że té wycinki mogą przyſtać do siebie, bo maią łuki równé; Tróykąty mogą téż do siebie przyſtać, bo maią wszyſtkié trzy boki równé.

Więc i dwa odcinki, przyſtać mogą do siebie będąc różnicą dwóch Tróykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszyſtko to, co się teráz powiedziało, trzeba przyſtósować do łuków, ciénciw, wycinków, odcinków iednégo koła.

Té podaniá powinnyby się wydáwać oczywiſtémi, i nie potrzebować wcale żádnégo dowodzéniá, i z téy przyczyny są bardzo zdatné, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczénié się iak náydokładnieyszé z tych nawet wyobrażéń, któré im iuż wyſtawuią rzecz iaką dosyć iaśnie; i aby tym sposobém wyobrażéniá w sobie proſté, prościeyszémi ieszcze czynić uczyli się.

175.

175. *Twierdz:* 1. Prostopadłá ciągnioná od śrzodka ciénciwy, przechodzi przez śrzodek koła.

2. Liniiá prostá prowadzoná od śrzodka koła do śrzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

3. Prostopadłá od śrzodka koła spuszczoná na ciénciwę, przypada ná iéy śrzodek.

Táb. X. *Fig.* 2. Niech będzie AB, ciénciwa w kole, którégo śrzodek C, a promień CA.

1. Prostopadłá od śrzodka D, ciénciwy wystawioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Dowodz: W téy prostopadłéy wszystkié punkta iednakowo są odległé od dwóch końców ciénciwy: a że i śrzodek koła iednakowo iest odległy od dwóch końców téyże ciénciwy: więc będzie też znáydowáł się na téy prostopadłéy.

2. Liniiá CD, od śrzodka koła poprowadzoná do śrzodka ciénciwy, iest do niey prostopadłą.

Dowodz: Tróykąty: DCA, DCB, mają wszystkié boki równe; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D, są równé, a będąc kątami przyległémi, obadwa prosté bydź muszą, a zatem liniiá CD, iest prostopadłá do AB. 3.

3. Prostopadła CD, spuszczona od środka koła na cienciwę AB, przypádá na iey środek.

Dowodz: W Tróykącie Równoramiennym ACB, kąty A i B są równe; więc w Tróykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkie kąty równe będą iedne względem drugich: a że i boki AC, CB, są równe; więc te dwa Tróykąty przystać do siebie mogą, a w szczególnosci linie AD, i BD, są równe.

176. *Wniosek.* Koło nie może mieć więcey, iak dwa punkta spólne z liniią prostą; bo gdyby mogło mieć więcey takich spólnych punktów, naprzykład trzy; złączywszy iedną liniią punkt pierwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwszy do tych dwóch liniy dwie prostopadłe, te uczyniłyby Tróykąt maiący dwa kąty proste, co iest nie podobna.

177. *Zagád:* 1. Maiąc dane trzy punkta, których położenie nie iest w linii prostey, nakreślić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz: Ponieważ środek koła powinien się znaydować na każdey proſtopadłey poprowadzoney od srodka linii łączącey dwa punkta, znayduiące się

w ko-

w kole, ieżeli tedy pierwszy z punktów danych złączymy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od śrzodka tych dwóch liniy poprowadzimy Prostopadłe; té przetną się w punkcie, który będzie śrzodkiém koła maiącégo przechodzić przez trzy punkta dané.

178. *Przystósowanié*. Znaléźć śrzodek koła danégo.

Rozwią: Na okręgu koła, weźmy trzy iakiékolwiek Punkta, a przez poprzedzaiącé zagádnienié szukáymy śrzodka koła przez té trzy punkta przechodzącégo.

179. *Wniosek*. Ponieważ prostopadłé wystawioné na śrzodku dwóch liniy łączących punkt iedén dany z dwoma innémi, nié mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nié może bydź więcéy iak iedno koło przechodzącé przez té trzy punkta: albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez té trzy punkta, toby nie były tylko iednem w rzeczy saméy kołém: a zatém gdy dwa koła się przecinaią, nie więcéy mogą mieć iak dwa punkta spólné w przecięciach. Ta własność koła, że ié z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wszystkié iego promienié są równé, różni koło od wszystkich krzywych liniy, podobnie iako liniiá prostá różni się przeto od krzywych liniy, że dosyć

ieſt

iest mieć dwa punkta dané, aby ią wyznaczyć.

180. *Twiérdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promieniá; wszystkié inné punkta téy prostopadłéy będą za kołem.

Dowodz: Odległością którégokolwiek z tych inszych punktów, od śrzodku koła, iest przeciwprostokątná Tróykąta, którégo bokiém iednym iest promień koła: a że przeciwprostokątná większá iest od iednégo z boków Tróykąta; więc i odległość od śrzodka koła, punktu którégokolwiek na prostopadłéy, oprócz tego, który iest końcém promieniá, większá iest od tegoż promieniá: a zatém każdy z tych punktów będzie za kołém.

181. *Defin:* Gdy prostá liniiá iedén tylko má punkt spólny z okręgiém koła; taká liniiá nazywá się styczną z kołém (*Tangens Circuli.*)

182. *Zagádn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

Rozwiąz: Punkt dany ze śrzodkiém koła złączmy promieniém: i od tegoż punktu wyprowádźmy prostopadłą do promieniá: a ta sama będzie i styczną z kołem w punkcie danym. 183.

183. *Zagádn:* 3. Od punktu danégo za kołém, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

Rozwiąz: Złączmy liniią, punkt dany ze śrzodkiém koła. Na téyże linii, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole; punktém, gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dané, będzie tym samym punkt tén, do którégo poprowadzoná liniiá od punktu danégo, będzie styczná z kołém (159.)

To zagádniénié dwoiako może bydź rozwiązané: gdyż półkole z jednéy lub z drugiéy strony śrzednicy nakréślić możná.

184. *Twiérdz*: 3. Od końca promiéniá poprowadziwszy styczną z kołém, ieżeli przez punkt, w którym się ta styczná koła dotyká, przeciągniémy inszą iaką liniią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz: Promiéń koła iest prostopadły do styczné y w końcu tegoż promiéniá, a zatém pochyły będzie do każdéy inszéy linii, przez tén koniec promiéniá, toiest punkt koła przychodzącéy. Poprowadziwszy więc prostopadłą od śrzodka koła do téy linii, ta prostopadłá krótszá będzie od promieniá: bo promiéń będzie przeciwprostokątną tego Tróykąta, któ-

régo

rego ta prostopadła będzie tylko bokiem: a że koniec promieniá iest na okręgu koła; więc koniec tey prostopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła, na końcu promieniá: a zatem liniiá ta przechodząca przez koniec promieniá, ponieważ drugi swóy punkt má w kole, przecinać go musi.

185. *Twierdz:* 4. Jeżeli liniiá prostá iest styczną z kołem, będzie:

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniiá styká z kołem będzie do tey styczney prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tedy liniiá inszá prostopadłá do tego promieniá, i przechodzącá przez iego koniec, byłaby styczną z kołem, a ta pierwszá zamiást stykaniá się z kołem, przecinałaby go: iako się w poprzedzaiącem twierdzeniu okázało.

2. Prostopadłá do styczney, od punktu dotknięciá ciągnioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Gdyby ta prostopadłá nie przechodziła przez śrzodek koła; tedyby iednak promień do tegoż punktu dotknięciá ciągnio-

gniony był prostopadłym do styczney, a zatém od iednego punktu, toiest od punktu dotknięcia, możnáby dwie prostopadłe prowadzić, co iest niepodobná.

186. *Uwága.* Pokázaliśmy (59) własność kąta, którego wierzchołek iest na okręgu koła, a którego dwa ramiona wspieraią się na końcach śrzednicy tegoż koła: to podanie było tylko przypádkiem szczególnym podania daleko ogólnieyszego, w którém się dowodzi, że wszystkie té kąty są równe, które wierzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspieraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twierdz:* 5. Kąt maiący swóy wierzchołek na okręgu koła; a którego ramiona są cienciwami tegoż koła, iest połową innego kąta, który má wierzchołek w samym koła śrzodku, a ramionami swémi obeymuie ténże sám łuk, co i kąt pierwszy.

Táb. X. *Fig.* 3. Niech będą kąty ACB, ADB, z których pierwszy má wierzchołek w śrzodku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D: i niech obadwa té kąty obeymuią ramionami swémi ténże sám łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypádek 1. Gdy iedno ramię AD kąta

kąta ADB, iest razém i śrzednicą koła.

Dowodz: Tróykąt BCD, iest równoramiénnym, więc kąty B i D będą równé, a summa ich, dwa razy większá od iednégo z nich: ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, równá się téy summie kątów B i D: więc dwa razy iest większy od iednégo z nich, naprzykład od kąta D. Táb. X. Fig. 4. i 5.

Przypádki té, w których żádné ramié kąta ADB nie byłoby razém śrzednicą koła, możná łatwo przywieśdź do przypádku piérwszégo, poprowadziwszy śrzednicę DE.

Przypádek 2. Gdy śrzodek C, ieſt między ramionami kąta ADB.

Dowód. Kąt ADB, ſkłádá się z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB ſkłádá się także z dwóch kątów: ACE i BCE: a że podług dowiédziéniá w piérwszym przypádku każdy z tych dwóch oſtatnich kątów, ieſt dwa razy większy od iednégo z piérwszych, którégo ramioná obeymuią ténże sám łuk; więc obadwa razém piérwszé kąty są też dwa razy większé od obudwóch razém kątów drugich: a zatém kąt ACB, dwa razy ieſt większy od kąta ADB. Táb. X. Fig. 4.

Przypádek 3. Gdy śrzodek C, nie ieſt między ramionami kąta ADB. Do-

Táb. X. Fig. 5. *Dowodz*: Kąt ECB, dwa razy ieſt większy od kąta EDB, (1. Przypádek), ténże kąt ECB, ſkłádá się z dwóch katów: ECA, ACB, kąt także EDB, ſkłádá się z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy ieſt większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB.

788. *Uwága.* Uczniowie poczynaiący, więcéy doznáwać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciégo przypádku, niż drugiégo, w którym przez dodáwanié to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanié. Można im to w tén ſpoſób obiaśnic, że dwie naprzykład liczby 12. i 8. z których piérwszá dwa razy ieſt większá od 6, a drugá od 4. té, mówię, dwie piérwszé liczby, gdy dodané będą, summa ich 20, będzie téż większá dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4. toieſt od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8. piérwszé większé ieſt dwa razy od 6, a drugie od 4, różnica między 12, i 8, toieſt 4, dwa razy téż większá będzie od różnicy między 6, i 4. toieſt od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnáby na liniiach to samo okázać.

Táb. X. Fig. 6. Niech będzie Liniiá AB, większá dwa razy od CD, i AE większá także dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczy-

wszy

wszy na linii AB, Liniie EG, EH, równe liniióm FC, FD; Liniie: AG, i BH, będą tak iedna, iako i drugá oznáczać różnicę Linii AE, od CF, summa zaś tych dwóch liniy AG, i BH, oznaczy różnicę całey linii AB, od całey linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami swemi iednakowe łuki obeymuią, są równe: albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w samey rzeczy iest, co do kątów przynáymniey oftrych, toiest: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okręgu, wynika to z Twierdzenia poprzedzaiącego. Z następuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo má mieysce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twierdz.* 6. Summa kątów w odcinkach na przemián, (174.) równá się dwóm kątóm proftym: albo co iedno znaczy ieżeli czworokąt iest kołem obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równá się dwóm kątóm proftym.

Niech cieńciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w iednym odcinku, wráz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrownywá dwóm kątóm proftym; albo, summa kątów D, i C, czwo- Táb. XI. Fig. 2.

rokąta kołém obwiedzionégo, równá się dwóm kątóm próſtym.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną DC.

Dowodz: Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami swémi łuk ieden AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równé. Dlá téyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równé. Summa tedy kątów ADC, BDC, toieſt kąt ADB, równá się summie kątów: ABC, BAC: a zatém summa kątów ADB, ACB, równá ieſt summie trzech kątów Tróykąta ABC; a ponieważ ta oſtatniá summa wyrównywá dwóm kątóm proſtym; więc i tamta.

Powtórzénié. Jeżeli ciénciwa ieſt razém i śrzednicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdém tém półkole, kąty są proſté.

Jeżeli ciénciwa nie ieſt śrzednicą; dzieli koło na dwa odcinki, iedén większy a drugi mnieyszy od pół okręgu: kąt w większym odcinku wspiérá się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i ieſt oſtry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiérá się na łuku większym od pół okręgu i ieſt roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów proſtych, z kątém oſtrym w drugim odcinku.

191. *Twiérdz:* 7. Jeżeli od punktu

w od-

w odcinku koła, lub za odcinkiem będącego, do końców podstawy tego odcinka poprowadzimy dwie linie; kąt między temi dwiema liniiami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiem CAB; prowadźmy od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegóż odcinka Liniie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB. Tab. XI. *Fig.* 2.

Dowodz: W pierwszym razie, kąt ADB, iest zewnętrzny Troykąta DBC, więc iest większy od iednego z wewnętrznych kątów tegoż Tróykąta, toiest, od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, iest zewnętrzny Tróykąta CDB, a zatém większy od kąta D, albo co na iedno wychodzi, kąt D, iest mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwága* 1. W pierwszym razie, gdzie ramię BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swémi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty iest między przedłużeniami ramión AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramię BD prze-

ciná okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy ieſt od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obeymuie swémi ramionami łuk CE, a tén łuk CE, mnieyszy ieſt od łuku AB, obiętégo od tychże ramión AD, BD kąta ADB.

193. *Uwága* 2. Na okręgu koła znáyduią się te wszyſtkié punkta, od których poprowadziwszy dwie linie do dwóch punktów danych, kąt między dwiéma témi liniiami zawarty, iednakowy zawsze będzie, toieſt, okrąg koła ieſt *mieyscém* (Locus) tych wszyſtkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między ſtyczną z kołém i między ciénciwą przez punkt dotknięciá prowadzoną, nazywá się *kątém odcinka.*

195. *Twiérdz.* 8. *Kąt odcinka*, równá się kątowi *w odcinku ná przemián.*

Táb. XI. Fig. 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, ſtyczną z kołem, i BA, ciénciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięciá. Tén kąt równy ieſt kątowi którémukolwiek w odcinku na przemián, naprzykład kątowi BEA, którégo iedno ramié BE ieſt śrzednicą do punktu dotknięciá B, poprowadzoną.

Dowod. Kąt EBD, między śrzednicą EB, i ſtyczną BD, zawarty, ieſt proſty (185) toieſt summa kątów: ABE, i ABD, czyni kąt proſty. Kąt

Kąt A w półkole ieſt téż proſty (159) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Tróykącie równá także będzie kątowi proſtemu. A zatém kąt ABE tak z kątém AEB, iak i z kątém ABD, czyni kąt proſty. Muszą tedy równé bydź kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagádn*: 4. Na linii danéy zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

Niech będzie liniiá AB, na któréy zrobićby trzeba tén odcinek. Táb. XI. *Fig.* 3.

Rozwiązanié. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z liniią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowádzám proſtopadłą do BD, a od punktu A, drugą proſtopadłą do AB. Punkt E, przecięciá tych dwóch proſtopadłych, wyznaczy mi wielkość śrzednicy BE, należącéy do tego koła, w którégo odcinku má się mieścić kąt dany.

Albo téż: Od śrzodka linii danéy AB, prowadzę Proſtopadłą która przetnie liniią BE, w punkcie maiącym służyć za śrzodek koła, w ktorém będzie odcinek żądany.

Zamiáſt robieniá kąta ABD, równégo danému, możnáby zrobić kąt ABE, dopeł-

pełniaiący kąt dany do 90. stopniów, toiest, czyniący z nim razém kąt prosty.

197. *Zagádn: 5.* Maiąc dané koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz: Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danégo, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięciá prowadzę ciénciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta ciénciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagádn: 6.* W koło dané wpisać (*inscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkié równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie ciénciwy po prawéy i po lewéy ręce, czyniącé dwa kąty równé kątóm Tróykąta danégo. Liniiá trzeciá łączącá końce tych dwóch ciénciw, będzie trzecim bokiém Tróykąta, którégo kąty wszystkié równé będą kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 2. Tróykąt dany opisuię (*circumscribo*) kołém, i do trzech wierzchołków kątów, prowadzę od śrzodka trzy promiénie. Od tegoż samégo śrzodka, kréślę koło, promieniém koła danégo. Punkta, w których okrąg tego drugiégo koła, przecinać będzie promiénie trzy

pier-

pierwszego, będą wierzchołkami kątów Tróykąta, którego szukam.

199. *Zagádn:* 7. Maiąc dany Tróykąt, wpisać weń koło, to ieft nakreślic takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Tróykąta.

Rozwiąz: Śrzodek tego koła, ponieważ iednakowo má bydź odległy, od wszystkich trzech boków Tróykąta danego, musi się gdzieś znáydowáć na linii dzielącey kąt którykolwiek Tróykąta na dwie równe części: gdyż tey linii odległość punktów wszędzie będzie równa od dwóch boków Tróykąta iey przyległych: podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Tróykąta drugą liniią; tam gdzie ta drugá liniiá przetnie pierwszą, będzie śrzodek koła, którego szukámy: bo ten punkt przecięciá będzie iednakowo odległy od wszyftkich trzech boków Tróykąta danego.

200. *Zagádn.* 8. Maiąc dané koło, opisać na nim (*circumscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkie równé kątóm Tróykąta danego.

Rozwiąz. 1. W Tróykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięciá, prowadzę trzy promienie. Od tegoż samégo śrzodka kreślę drugié koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg

okrąg tego drugiégo koła przecinać będzie promiénie trzy piérwszégo, albo ich przedłużéniá oznaczą trzy punkta dotknięciá trzech boków Tróykąta, któręgo szukám.

Rozwiąz: 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promiéni koła danégo, i ze dwóch ftycznych z kołém w końcach tychże promiéni, kąty dwa między témi promiéniami i stycznémi będą prosté, a zatém kąt iedén między dwiéma stycznémi, i drugi kąt między dwóma promiéniami, będą razém wzięté, równé dwóm kątóm prostym. (85) Stąd wypádá wykréślénié następuiącé.

Prowadzę promiéń iedén w kole danem: po obudwóch ftronach tego promiéniá, prowadzę dwa insze czyniącé z piérwszym dwa kąty, równé kotóm dwóm dopełniaiącym dwa którékolwiek kąty Tróykąta, do 180. ftopniów, toiest, równé dwóm kątóm przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promiéni przeciągám trzy styczné, té zrobią Tróykąt żądany.

RO-

ROZDZIÁŁ VIII.

Wstęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczné, z przystósowaniém w szczególności do Tróykątów podobnych, a w ogólności do inszych Figur prostokréślnych także podobnych.

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przystáwaniá iednych do drugich, czyli do ich równości. Teráz téż samé ilości porównywać z sobą będziémy w sposób ogólnieyszy.

201. *Uwagi.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, któré miały iednakową podstawę i wysokość były równé. Weźmy teráz dwa równoległoboki z równą wysokością, ale z nie iednakową podstawą, i obáczmy co za różnica wypadnie między témi dwóma równoległobokami, z przyczyny nie równości ich Podstáw.

Jeżeli Podstawa iednégo z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, większá będzie od podstawy drugiégo; dá się podzielić tén piérwszy równoległobok, na dwa, trzy, cztéry, i t. d. równoległoboki równé między sobą, i z drugim równoległobokiém: ponieważ

wszy-

wszystkie iednakowe mieć będą wysokości, i podstawy; a zatém tén pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy większy od drugiégo.

Gdyby podstawa pierwszégo równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiégo równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwszá podstawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. ακich części, iakich podstawa drugá má 3; możnaby tę pierwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między sobą, i równych także każdéy z 3. części drugiéy podstawy; a zatém, iako liczby ukazuiącé wielkość podstawy pierwszégo równoległoboku względém podstawy drugiégo, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazuiącé wielkość pierwszégo równoległoboku względém drugiégo, są: 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo; iako podstawa pierwszégo równoległoboku, zamyká w sobie podstawę drugiégo tylé razy, ilé oznáczaią liczby ułomkowé $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d. tak też pierwszy równoległobok zamyká w sobie drugi, tylé razy, ile oznáczaią té samé liczby ułomkowé $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Tróykąty maią równé wysokości, a nie równé podstawy, ieżeli podstawa pierwszégo Tróykąta zawiérać w sobie będzie podstawę drugiégo, dwa, trzy, cztéry i t. d. razy; to też powiérz-

wierzchniá tego pierwszego Tróykąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy większá od powierzchni drugiego. Toż mówić, gdy podstawa iednego Tróykąta, zamiáſt zawieráć w sobie kilka zupełnie razy podſtawę drugiego, będzie się tylko ſkłádała z kilku takich części równych, z jakich się ſkłádá i podſtawa Tróykąta drugiego. J tak ieżeli podſtawy obudwóch Tróykątów zamykaią w sobie, iedna 4, a drugá 5, takichże równych części; té też dwa Tróykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5, równych między sobą Tróykątów maiących wysokość iednakową z wysokością niepodzielonych Tróykątów, a za podſtawę, część iednę tylko podstawy tamtych Tróykątów. A zatém, iako podſtawa pierwszego Tróykąta ieſt $\frac{4}{5}$ podſtawy drugiego, tak też i powierzchniá pierwszégo Tróykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa kąty maiące swoié wierzchołki weśrzodku tego samego koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swémi łuki równé, są równé (174).

Jeżeli tedy z dwóch katów we śrzodku kół równych, ieden wspierá się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d. większym, niżeli iest tén na którym wspierá się kąt drugi; możná tamtén kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych

sobie

sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. I tak ieżeli ieden z tych łuków może bydź podzielony na 4. równe części, a drugi na 3. takież części; dwa kąty, które się wspieraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, á drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przyftósować można i wycinkóm w kołach równych, względem łuków, które ramionami swemi też wycinki obeymuią.

W takich szczególnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości iednakowego gatunku, naprzykład dwie linie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiey, i znaydowano, że tylekroć i insze dwie ilości iednakowego także gatunku zamykały się iedna w drugiey, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Tróykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do siebie przyrównywámy, abyśmy wiedzieli, ile razy iedna zamyká w sobie drugą; takie przyrównywanie nazwać można stósunkiem Geometrycznym (*Ratio Geometrica*) albo bez przydatku ftósunkiem tych dwóch ilości. Pierwszy wyráz ilości, którą do drugiey ftósuiemy, zwać będziemy *Poprzednikiem* ftósunku (*antecedens rationis* :) Drugi zaś wyráz ilości

tey

téy, do któréy przyrównywámy ilość piérwszą, nazwiémy *Następnikiém (consequens)* stósunku. To co z tego przyrównaniá wyniká, nazwać można *Wykładnikiém* stósunku (*exponens rationis.*) Dwa stósunki nazywaią się równémi, gdy równémi są ich wykładniki.

203. *Uwága.* Z tych samych Definicyy widzimy, że wyrazy stósunku Geometrycznégo, nié mogą bydź tylko iednakowégo gatunku, gdyż nié można do siebie przyrównywać, tylko ilości iednakowégo gatunku: a stąd dwa wyrazy stósunku tego, zawsze w liczbach mieć możémy, z których iedna tylé razy zamykać w sobie drugą będzie; ilé razy ilość przyrównywać się maiącá, zamyká w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do któréy ią przyrównywámy. Przeto stósowanié takié uważać można iak dzielénié liczebné biorąc za liczbę podzielną poprzednika stósunku, za liczbę dzielącą następnika stósunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stósunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którégo Licznikiém Poprzednik, a mianownikiém następnik stósunku.

204. Gdy się cztéry ilości takié znáyduią, że stósunek dwóch piérwszych, równy iest stósunkowi dwóch drugich; takié cztéry ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mó-

i mówimy, że tak się má Poprzednik piérwszégo ſtósunku, do swégo naſtępnika, iak się má Poprzednik drugiégo ſtósunku do swégo także Naſtępnika. I tak, przypádki szczególné, któréśmy za przykład wyżéy przytoczyli, takby mogły bydź wyrażoné.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo z nich, tak się będzie miała do powiérzchni drugiégo; iak się má podſtawa piérwszégo, do podſtawy drugiégo. Jeżeli dwa Tróykąty iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się má do powiérzchni drugiego Tróykąta, iak się má podſtawa piérwszégo do podſtawy drugiégo.

Jeżeli dwa kąty we śrzodku dwóch równych kół znáyduią się; iedén z tych kątów, tak się mieć będzie do kąta drugiégo, iak się má łuk obięty od ramión piérwszégo kąta, do łuku obiętégo od ramión drugiégo kąta.

Jeszcze i tak możnáby té samé podaniá wyráźić: Dwa równoległoboki iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Tróykąty iednakowéy wysokości, tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa

Dwa kąty we śrzodku kół równych tak się maią do siebie, iak dwa łuki, na których się wspieraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec ieszczę króceý zwykły się czasém wyrażać podobné podania, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieszcze znaczących ilości odmiennégo gatunku. *Wielé na tém zawisło, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powierzchnia równoległoboku, którégo wysokość iest *iednostayna* (constans) proporcyonalną iest do swoiéy podstawy.

Tu się opuszczá wyráz drugiégo równoległoboku, który także wchodzi w porównanié, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dlá tego się zaś opuszczaią, że tén drugi równoległobok równéy z pierwszym wysokości bydź mniemámy, i iednostaynéy, toiest nieodmiennéy podstawy, a zatém i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względém drugiégo równoległoboku opuszczonégo; im podstawa pierwszégo większá lub mnieyszá iest od podstawy drugiégo. Tak, niech pierwszy równoległobok má wysokości 3. łokcie, ró-

wnie

wnie iak i drugi; ieżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatem i iednostayną powierzchnią 12, łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiego, toiest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powierzchnią od drugiego, im większą lub mnieyszą dámy mu podstawę od drugiego. Dáwszy mu naprzykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchniá iego 24. łokci kwadratowych, dwa razy większá od powierzchni drugiego równoległoboku: dáwszy mu podstawy 2. łokci, będzie powierzchniá iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieyszá od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwszy równoległobok, albo powierzchniá iego, tyle się tylko powiększá lub pomnieyszá względem powierzchni drugiego równoległoboku, ile się powiększy lub pomnieyszy podstawá iego względem podstawy drugiey iednostayney; dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powierzchniá tego równoległoboku, którego wysokość iednostayná, proporcyonalną iest do swoiey podstawy, toiest, gdy podstawa dwa razy naprzykład większá będzie, powierzchniá też większá będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mnieyszá, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości ozna-
czo-

czoné przez ABCD, które do siebie stósować można; zgodzono się; aby stósunek tén wyrazić kształtém następuiącym A:B=C:D: co się tak wymawia: A, tak się ma do B, iak się ma C, do D. Dwa punkta umieszczoné między dwóma wyrazami każdégo w szczególności stósunku znakiem są dzielénia iednégo wyrazu przez drugi: dwie zaś linie w pośrzodku znaczą równości dwóch stósunków.

206. *Wnioski.* Z tych *zasád* (principium) któréśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiące podania.

1. Jeżeli dwa stósunki są równé trzeciému; równé też i sobie będą.

2. Jeżeli w dwóch Proporcyach trzy piérwsze wyrazy w jednéy, równé są trzém piérwszym wyrazóm w drugiéy; to i czwárté wyrazy równé téż będą.

3. Stósunek między dwiéma ilościami ténże sám iest, co i między témiż ilościami podwoionémi, potroionémi i t.d. Tak naprzykład 4. má się do 2, iak 8 do 4, albo iak 12 do 6. i t.d. Stąd wyniká, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa piérwszé lub dwa ostatnié wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między témiż cztéréma wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki, a proporcyá wszelako będzie zachowaná. W pierwszym razie wykładnik stósunków, stanie się dwa, trzy, i t.d. razy większym, niż był z początku: w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t.d. Wykładnika pierwszego.

5. W téyże samey proporcyi, można odmienić mieysce obudwóm Poprzednikóm, to iest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po téy odmianie zachowaná będzie między dwoma stósunkami téyże proporcyi. I tak naprzykład w téy Proporcyi: 4:2=12:6, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12. i napisać: 2:4=6:12, wszelako iednak zachowá się Proporcyá: bo iako w pierwszéy proporcyi wykładniki stósunków obudwóch: 4: 2, i 12: 6, były równe, toiest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wielorąz, 2; tak i w drugiéy proporcyi, wykładniki stósunków 2: 4 i 6: 12 są równe; toiest, tak 2, przez 4 iak i 6. przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wielorąz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mówić i o podobnéy odmianie w jakiéykolwiek inszéy Proporcyi:

cyi: co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B=C: D.
to też i B: A=D: C.

6. W proporcyi każdéy można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch piérwszych wyrazów, tak się ma do iednégo z tych dwóch wyrazów, iak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednégo z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4:2=12:6, to też będzie 6:2=18:6, albo 6:4=18:12, albo 2:4=6:12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiémy do następnika iéy własnégo; Wykładnik każdégo w szczególności stósowania powiększy się lub pomnieyszy iednością, a zatém równy będzie w obudwóch stósunkach i po takiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiémy do Poprzednika iéy własnégo, iedno czynimy, iak gdybyśmy piérwéy poprzednika każdégo za Następnika położyli, a potém dopiéro, summę lub różnicę ich stósowali do następników, tak iak wyżéy; a zatém tąż częścią pomnoży się lub zmnieyszy wykładnik piérwszégo stosunku, iak i drugiégo.

Wyrażenia literalne tegoż samego.

Jeżeli A: B = C: D.

to też A + B:B = C + D:D

A — B:B = C — D:D

A +: B:A = C + D:C

A — B:A = C — D:C.

Gdyby Następniki większe były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A:B = C: D możnaby w tę zamienić B:A = D:C. a zatem.

B—A: A = D—C: C

B—A: B = D—C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztery wyrazy iednego są gatunku, toiest, gdy wszystkie znaczą n.p. linie, lub powierzchnie i t.d. można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się ma do summy dwóch Następników; iak się ma którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Jakoż, ieżeli ieden Poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swego Następnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy następnika swego zamykać w sobie będzie; a zatem i summa Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie summę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy

my następników, iak każdy w szczególności Poprzednik do swégo Następnika. To, samo rozumowanié przystósować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników, i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkié té odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnic należy.

207. *Uwága.* Dadzą poznać Nauczyciele Ucznióm swoim, że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiém proporcyi, w, któréy z trzech wyrazów znaiomych, szukámy czwártégo nieznaiomégo: co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożénié nawet i dzielénié, do proporcyi przyrównać możná: bo w mnożeniu liczby, mnożná i mnożącá, są śrzedniémi wyrazami proporcyi, iedność iest piérwszym wyrazém proporcyi, a liczba rozmnożoná iest ostatnim wyrazém. I tak naprzykład: 4×3=12. rozłożyć możná na proporcyą następuiącą 1: 4 = 3: 12. W dzieléniu zaś, liczba dziełącá i wieloráz są śrzedniémi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazém piérwszym: a liczba podzielná iest ostatnim wyrazém. I tak, naprzykład, $\frac{8}{4}=2$, albo 8:4=2, rozłożyć możná na proporcyą następuiącą 1:4=2:8. Więcéy ieszcze takowych przykładów podadź nie zawadzi.

208. *Twierdzenie 1. fundamentalne.* Gdy w Tróykącie iakimkolwiek bok ieden przedłużaiąc go powiększymy dwa, trzy, cztery pięć i t. d. razy, i przez końce takiego przedłużenia poprowadzimy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobią się tym sposobem Tróykąty których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Tróykąta, dwa, trzy, cztéry, pięć i t. d. razy.

Tab. XI. Fig. 4. Niech na przykład będzie troykąt ABC, któregośmy bok AB, tak przedłużyli, aby liniia AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległą od BC; Liniia DH. dwa razy też większa będzie od linii BC, a liniia AH dwa razy większa od linii AC.

Wykreślenie. Przez punkt C. poprowadźmy CN równoległą od AB, którąby spótkała w punkcie N, liniią DH.

Dowodz: Czworokąt BDNC, iest równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne są równe toiest, BC = DN, a BD = CN: a że BD = AB; więc i CN = AB. Kąty iednostronne A, i NCH są równe, iako też i kąty iednostronne ACB, AHD: a zatem Tróykąty ACB, CHN dla równości kątów wszystkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC = CH, a tém samém AH = 2 AC, toiest,

ieſt, liniiá AH dwa razy większá od AC. Jest też i BC = NH, a tém samém DH = 2 BC, toiest, liniiá DH dwa razy większá od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowádźmy EI równoległą od BC. Podobnie, iak wyżéy, dowiéśdź będzie możná, że też liniiá EI trzy razy ieſt większá od BC, a AI trzy razy większá od AC: co się łatwo okáże pociągnąwszy liniią HO równoległą od A E: bo dlá równości kątów wszyſtkich, i boków AB, HO, Tróykąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatém AC = HI, i BC = OI. A że EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatém EI = 3 BC. Tak też i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże sposobém dowodzi się, że ieżeli linii AF, cztéry razy będzie większá od linii AB; Liniiá też FL równoodległá od BC, cztéry razy od niéy większá będzie, i liniiá AL, cztéry także razy większá od AC, i t. d.

209. *Zagádn.* 1. Podzielić daną liniią na ilékolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniiá daná AG, którą podzielić mámy na 5. części równych.

Rozwiązanié. Od końcá iednégo, naprzykład A, linii danéy AG, prowadzę dru-

drugą liniią AM, iakiéykolwiek długości, czyniącą z liniią daną, kąt iaki mi się podobá. Od A ku M, biorę tylé części równych na linii AM, na ilé ich má bydź podzieloná liniiá AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatnia część podziału kończy, łączę liniią MG z punktem G, Linii danéy AG. Przez inszé podziału punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległé od linii M G, do linii AG. Té równoodległé: LF, IE, HD, CB, wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziału żądanégo.

Podobnym sposobém poſtąpić sobie trzeba, gdy na więcéy lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dlá większéy łatwości, w prowadzéniu równoodległych, można użyć następuiącégo sposobu, zwłaszcza gdy na wielé równych części przypádá dzielić liniią daną.

Táb. XI. Fig. 5. Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iéy iednégo A liniią AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiégo końca B, prowadzę liniią BD, od piérwszéy równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziałów

równych

równych w obudwóch liniiach, łączę tyląż równoodległémi; té przetną liniią daną AB w punktach podziału żądanégo.

Dowodzénié tego nie różni się od poprzedzaiącégo, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można iedén tylko Tróykąt, BAC, lub ABD; a zatém równość części, Linii AB, podobnie się, iak w piérwszym Twiérdzéniu dowiedzie. (p)

210. *Twiérdz:* 2. Dwa Tróykąty równokątné, maią proporcyonalné boki przeciwné kątóm równym.

Niech będą dwa Tróykąty AGM, i abc, w których kąty A i a, G i b, M i c są równé. Niech naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc. Táb. XI. *Fig.*4. *i* 6.

Jakoż odciąwszy Liniią AB, równą linii ab, i AC, równą ac, i pociągnąwszy liniią BC, Tróykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a w szczególności kąty

(p) Rozwięzuiąc tymże podobné Zagádniéniá, niecháy nie przestaią Uczniowie na Figurze podanéy, ale niech sami kréślą sobie podobną Figurę, i na niéy rozwięzuią Zagádniénié. Figura podaná niech im tylko służy do łatwieyszégo w czytaniu zrozumiéniá Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieia; niecháy, zamknąwszy nawet Xiążkę, na Figurze osobnéy od nich nakréślonéy pokażą Nauczycielóm, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.

B i b, C i c będą równé. A że też kąty G i b, M i c są równé; więc równe także są i kąty G i B, M i C; a zatém liniie BC, GM będą równoodległé. Przeto według pierwszégo Twierdzéniá, ieżeli AG iest pięć razy większá od AB, czyli od ab; będzie też i AM pięć razy większá od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większá od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Tróykątów, przeciwné równym kątóm nie pięć, ale mniéy lub więcéy zupełnych razy w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Tróykątach, przeciwné kątóm równym, nie zamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w sobie 7. takich równych części, iakich drugi má tylko 3; w takim razie inszé też boki równym kątóm przeciwné, w tychże Tróykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, ale ieden składałby się z 7, takich części, z jakich 3. składá się drugi. Tak na *Figurze* 7, gdzie Tróykąty ABC, abc, są równokątné i bokóm AB, ab, taká długość daná, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ab, takiéż miał 3. tylko części równé linii AD, albo ad; w tych Tróykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległé od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą piérwszy 7. drugi 3, części równé linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać

takze

takze będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Tróykątów, przeciwne kątóm równym, więcey lub mniey części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Tróykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy dobrze iest wierzchołki kątów równych naznaczać podobnemi literami: naprzykład, gdy nad wierzchółkiem kąta w iednym Tróykącie napiszemy literę A, napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Tróykącie literę a: gdy nad drugim kątem, w pierwszym Tróykącie będzie B, niech i nad drugim kątem równym tamtemu w drugim Tróykącie będzie b, i t.d. Tym sposobem i boki przeciwne równym kątom w obudwóch Tróykątach, będą podobnemi też literami naznaczone: a zatem, gdy w Proporcyi weźmiemy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stósunku, za Następniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc, i dla tego wszystkie te proporcye będą dobre; AB: ab = AC: ac. AB: ab = BC: bc, albo AC: ac = AB: ab. BC: bc = AB: ab; albo, AC: ac = BC: bc, albo BC: bc = AC: ac.

212. *Twierdz:* 3. Jeżeli we dwóch Tróykątach, kąty dwa którekolwiek są równe i boki dwa około każdego z tych

kątów

kątów proporcyalné; takié Tróykąty będą równokątné.

Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równé boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalné, toiest, niech się ma tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB: ab = AC: ac. W takim razie będą też równé kąty B, b, i kąty C, c, a zatém i stósunek boków BC, bc, będzie tén sám, co i boków AB, ab, albo AC, ac.

Táb. XII. Fig. 1. *Wykréślénié.* Na boku AB, weźmy linią AD, rowną ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE, są równokątné: więc (iako się w drugim Twiérdzéniu dowiodło) AB: AD. (albo ab) = AC: AE. A że AB: ab = AC: ac, więc AE = ac: a zatém Tróykąty ADE, abc mogą przystać do siebie: że zaś Tróykąty ABC, ADE, są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ABC, abc, a zatém, AB: ab = BC: bc.

213. *Twiérdz:* 4. Jeżeli w dwóch Tróykątach, trzy boki w jednym są proporcyonalné względém trzech boków w drugim, takié Tróykąty będą rownokątné.

Niech będą dwa Tróykąty, ABC, abc, i bo-

i boki w nich proporcyalné, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, té dwa Tróykąty są równokątné.

Wykréślénié. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE są równokątné, więc AB: AD (albo ab)=AC: AE.

A że téż iest AB: ab. =AC:ac

więc - - - AE = ac

Podobnie AB:AD (albo ab) =BC: DE

A że téż iest, AB: - - ab =BC: bc

Więc - - - DE = bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, abc, wszystkié trzy boki maią sobie równé, i dla tego mogą przystać do siebie, i są równokątné. A że téż są równokątné i Tróykąty ABC, ADE, więc równokątné także będą Tróykąty ABC, abc.

214. *Twiérdz:* 5. Niech będą dwa Tróykąty maiącé kąt iedén prosty, roztwarty, lub ostry równy w obudwóch Tróykątach, i niech stósunek ramión przy tych kątach będzie równy stósunkowi boków przeciwnych tymże kątóm. Té dwa Tróykąty będą równokątné, byleby w trzecim przypadku, boki przeci-

wné

wné kątowi ostrému większé były w obudwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iedney lub po drugiey stronie przyległé témuż kątowi: albo, chociaż té boki przeciwné mnieyszé będą od ramión, byleby inszy kąt w obudwóch Tróykątach był roztwarty, lub ostry, który iedno ramié, má spólné z kątém piérwszym, równym w obudwóch Tróykątach. Niechby naprzykład były dwa Tróykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równé, i stósunek ramiéniá AC do ac, taki, iaki boku BC, do bc. Té dwa Tróykąty będą równokątné.

Tábl. XII. *Fig.* 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są prosté.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a, obadwa są roztwarté.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a obadwa są ostré, ale boki BC, bc, większé od ramión AC ac.

Gdy kąty A i a, obadwa są ostré, ale boki BC, bc, mnieyszé od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostré, *Fig.* 5. albo obadwa roztwarté *Fig.* 6.

Wykréślénié powszechné. Weźmy liniią AD, równą ac, i poprowádźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ACB, ADE są równokątné.

Więc

Więc AC:AD (albo ac) = BC:DE
Ale téż iest AC: ac = BC: bc
więc DE = bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, acb, mogą przystać do siebie, i są równokątné: a że też i Tróykąty ACB, ADE są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ACB, acb. (q)

215. *Def.* Gdy w dwóch Figurach prostokréślnych równé się kąty wszystkié znáyduią iedné względém drugich, i boki około tych kątów proporcyonalné; takié Figury nazywaią się *podobnémi* (Figurae similes.)

216. *Uwága.* Po przytoczonych dowodzéniach Twiérdzéń poprzedzaiących iaśnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Tróykątach, pociągá za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiémnie proporcyonalność boków w dwóch Tróykątach wywodzi równość kątów w tychże Tróykątach. W jnszych zaś Figurach prostokréślnych, któré z więcéy niż

(q) Dlá skrócéniá, różné té przypádki w jednéin powszechném zamknęło się dowodzéniu; lepiéy iednak będzie każdégo z osobna przypádku osobno Uczniom dowodzić, aby wielu razém okoliczności wystawiéniém, báczność ich nie byłá roztargnioná.

niż trzech boków są złożoné, nié można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiémnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. I tak kwadrat prostokątny, z kwadratém ukośnym, lubo maią boki proporcyonalné, nié maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą bydź nierówné i wcale nieproporcyonalné.

Trzeba iak náyiaśniéy i náydokładniéy wyłożyć Ucznióm té trzy rzeczy, toiest: *Przystawanié*, *Równość* i *Podobiéństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściągá się tylko do ich wielkości, nic zaś do ułożéniá boków, albo granic w których się zamykaią. I tak dwa Tróykąty, któré równé podstawy maią, i wysokości są sobie równé, lubo ich boki, nie iednakowo mogą bydź ułożoné, i większé iedné lub mnieyszé od drugich. Dlá tego téż można znaléźć Tróykąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokréślnéy danéy, iakážkolwiek liczba iey boków będzie, i tychże boków ułożénié.

Podobiéństwo ściągá się tylko do saméy Figury czyli ułożéniá boków, nie zaś do wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Tróykąty mogą bydź do siebie podobné, lubo ieden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobné, trzeba 1mo. Aby miały iednakową liczbę boków. 2do. Aby kąty w ieдnéy Figurze były równé kątóm w drugiéy. 3tio. Aby *boki odpowiadaiącé* (latera correspondentia) toiest, té, któré zamykaią w sobie kąty równé, były proporcyalné. I tak dwa kwadraty zawsze są podobné iedén do drugiégo, chociażby naprzykład bok iednégo był na milę długi, a drugiégo tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanié zamyká w sobie razém równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły; trzeba aby się w niczém nie różniły, tylko w tém, że na odmiennych mieyscach są nakréślоné. (r)

217. *Twiérdz. 6.* Jeżeli dwie iakiékolwiek Figury prostokréślné są podobné, i Táb. XIII. *Fig. 1.*

 w każdéy

(r) Przetrząsnąwszy Twiérdzéniá ściągaiącé się do równości, i do podobieństwa Tróykątów, łatwo postrzeżémy, że dowodzéniá tam przytoczoné zupełnie się zasádzaią na tych, któréśmy dáwali mówiąc o przystáwaniu Tróykątów. Wielé na tém zawisło, aby często przypominać Uczniom sposob postępowaniá, który prowadzi od wyobrażéń prościeyszych, do tych, któré bardziéy są zawikłané.

w każdéy z nich przez wierzchołki kątów równych, poprowadzimy do drugich kątów, tylé przekątnych, ilé ich poprowadzić można; wszystkié té Tróykąty, na które iednę Figurę podzielimy, będą podobné Tróykątóm w drugiéy Figurze.

Przykład: Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobné do siebie; od wierzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwſzy przekątné, AC, AD, ac, ad; Tróykąty, ABC, ACD, ADE, będą podobné Tróykątóm, abc, acd, ade.

Dowodz: Ponieważ té Pięciokąty są do siebie podobné, kąty w nich B i b, będą równé, i boki około tych kątów proporcyonalné; dwa więc Tróykąty ABC, abc, są do siebie podobné, iako maiącé kąty B i b, równé, i boki, około nich proporcyonalné, a w szczególności kąt ACB, równy iest kątowi acb: a że téż równé są dané kąty BCD, bcd; więc i kąty A CD, acd, równé będą. Boki także AC, ac, są między sobą iak boki AB, ab, albo BC, bc. A że tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, są w proporcyi z bokami DC, dc; więc i boki AC, ac, są proporcyonalné bokóm DC, dc; a zatém i Tróykąty ACD, acd, będą podobné, maiąc kąty C i c równé, i boki około nich AC, DC, ac, dc, proporcyonalné, a w szczególności kąty, ADC, adc, będą równé. A że znowu i kąty E, e, są równé; więc i Tróykąty ADE,

ADE, ade, będą względém siebie równokątné; a zatém podobne.

218. *Uwága* 1. Dlá dowiedziéniá, że Tróykąty ADE, ade, są podobné, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de; można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z samégo wykréśléniá; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła bydź równość okázaná, z równości iuż dowiedzionéy kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w jnnych Tróykątach: a tém samém równość kątów E, e, wydałaby się, a zatém i podobieństwo Tróykątów ADE, ade, byłoby dowiedzioné.

219. *Uwága.* 2. Wiele na tém zawisło, áby to dadź postrzédz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączoné będą przekątnémi wierzchołki dwóch kątów odpowiadaiących sobie; té przekątné mieć będą iednostayné stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tém gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączymy przez przekątné; Tróykąty złożoné z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobné.

220. *Zagádn:* 1. Maiąc dané trzy liniie prosté, na trzy piérwszé wyrazy proporcyi, znaléźć liniią czwártą proporcyonalną.

Wykréślénié. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wiérzchołka iego dwie dané liniie, maiącé służyć za dwa piérwszé wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym ſposobém i trzecią daną liniią na to ramié, na któré iuż iest przeniesioná piérwszá liniiá proporcyi. Od końca téy trzeciéy linii poprowádźmy aż do drugiégo ramiéniá liniią równoodległą od téy, która złączyła końce dwóch piérwszych liniy. Liniiá zawartá między wiérzchołkiém kąta i punktém, w którym oſtatniá równoodległá przeciná ramié drugié, będzie, czwártą liniią proporcyonalną, któréyśmy ſzukali. (s)

121. *Zagádn.* 2. Maiąc daną liniią prostą, tak ią przeciąć, aby dwa iéy odcinki tak się do ſiebie ſtóſowały, iak ſię ſtóſuią dwie inſzé dané liniie

Wykréślénié. Od końca iednégo linii danéy do przecięciá, poprowádźmy pod iakimkolwiek kątém liniią równą iednéy z tych dwóch, których dany iest ſtóſunek, a

(s) Co w Arytmetyce znaczy *Reguła trzech*, to znaczy w Geometryi Zagádniénié, aby trzy maiąc dané Liniie prosté, znaléźć czwártą proporcyonalną. Jest to w saméy rzeczy Reguła trzech wykonaná na liniiach.

a od drugiégo końca, w stronę przeciwną, poprowádźmy równoodległą od piérwszéy, równą drugiey linii, któréy także dany iest stósunek.

Złączmy końce tych dwóch liniy w przeciwné strony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, któregośmy szukali.

Albo tak. Od końca linii danéy do przecięciá, poprowádźmy liniią, któráby z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych liniy, których dany iest stósunek, i od końca znowu téy ostatniéy linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiéy, któréy także dany iest stósunek: koniec téy złączmy z końcém linii danéy do przecięciá: a od tego punktu, gdzie się piérwszá kończyła, a ta drugá zaczynała, poprowádźmy równoodległą, która przetnie liniią daną do przecięciá w punkcie żądanym.

Tén ostatni sposób postępowaniá, może bydź przystósowanym i w jnnych razach, gdzieby liniią daną na więcéy części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3. 4. 5. i t.d. które takby się miały do siebie, iak się maią 3. 4. 5. i t. d. liniy danych. (t)

(t) Takié zagádniénié iest tém samém w Geometryi, çzém iest w Arytmetyce *Reguła spółki.*

222. *Zagádn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby summa z téy linii i z jéy przedłużéniá tak fię miała do samégo przedłużéniá, iak fię maią do fiebie dwie infzé liniie dané: czyli, znaléźć dwie liniie, których daná ieft różnica i ftófunek.

Wykréślénié. Od obudwóch końców linii danéy, poprowádźmy w jednę ftronę dwie liniie równoodległé, i równé dwóm liniióm, których dany ieft ftófunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż fię fpotká z przedłużéniém linii danéy. Punkt tén fpotkaniá, wyznaczy długość przedłużéniá linii danéy; i odległość iego od dwóch końców téyże linii, będzie wymiarém długości dwóch liniy, którycheśmy fzukali.

223. *Zagádn;* 4. Maiąc dany Tróykąt, i liniią ofobną, wyftawić na téy linii Tróykąt podobny danému.

Sposób 1. Dwóm bokóm Tróykąta danégo, i trzeciéy linii danéy, fzukám czwártéy proporcyonalnéy, i mieć będę dwa boki Tróykąta, którégo fzukám, w proporcyi z dwoma bokami Tróykąta danégo. Tymże fpofobém znáydę i trzeci bok Tróykąta, który má bydź podobny Tróykątowi danému.

Sposób 2. Od dwóch końców linii danéy

ney prowadzę po iedney ſtronie dwie linije czyniące z nią dwa kąty równe dwóm kątóm Tróykąta danego; te dwie linije zeyściem ſię z ſobą, zrobią z daną liniią Tróykąt podobny danemu.

Sposób 3. Liniią daną przenoſzę na bok ktorykolwiek Tróykąta danego, tak, aby koniec ieden tey linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na ſamym boku Tróykąta, lub za nim, gdy liniia daná dłuższá będzie od boku Tróykąta. Z końca tego drugiego, linii daney prowadzę równoodległą od boku Tróykąta przeciwnego kątowi, od którego pierwſzą liniią ciągnąłem, i tak daleko ią prowadzę, aż ſię zniydzie z trzecim bokiem Tróykąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi ſię tym ſpoſobem Tróykąt podobny danemu, i maiący za podſtawę liniią równą daney, który to Tróykąt przeryſować potem mogę na ſamey linii daney. (u)

224. *Zagádn:* 5. Na daney linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze daney.

Rozwiąz: Na daney Figurze od końca boku którégokolwiek, prowadzę tyle

(u) Częsté tego zagádnieniá używanié, było pobudką do podaniá kilku sposobów, którémi bydź może rozwiązané.

lé przekątnych do innych kątów, ilé można, i dzielę tak Figurę daną na Tróykąty. Potém na linii daney wykreślam po iedney stronie sposobem wyżey opisanym, tylé Tróykątów podobnych, ilé ich iest w Figurze daney. Wierzchołki tych Tróykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, którey szukałem.

225. *Uwága*. Między innémi sposobami rozwiązania tego Zagádnienia, sposób podany zdaie się náylepszym: a to dla tego, że używaiąc go, uchybienia, które popełnić można w położéniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedné od drugich: i można uchybić w położéniu iedney linii, a nie uchybić tém samém, w położéniu drugiéy: na co osobliwszą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanié przybrané.* (Lemma). W Tróykącie prostokątnym, gdy spuścimy prostopadłą, od wierzchołka kąta prostégo; ta prostopadłá podzieli Tróykąt na dwa insze z pierwszym rownokątné, a zatém i równokątné między sobą.

Táb. XIII. Fig. 2. Niech będzie Tróykąt ABC prostokątny w C, skąd spuszczoná iest prostopadłá CD, na przeciw prostkątną AB; Tróykąty trzy: ABC, ACD, CBD są względem siebie równokątné.

Do-

Dowodz: Tróykąty ABC, ACD, maią kąt ſpólny A, i kąty ACB, ADC proſte, a zatem równe; trzeci przeto kąt w jednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Tróykąty, równokątne. Podobnie i Tróykąty proſtokątne ABC, CBD, maią kąt spólny B, i ſą także równokątne.

W Tróykątach równokątnych ABC, ACD, mamy proporcyą: AB: AC=AC: AD. w Tróykątach: ABC, CBD będzie, AB: BC=BC:BD; a w Tróykątach ADC, CDB; AD: DC=DC: BD. w Tróykątach, ABC, ACD, iest też i ta proporcyá: AB:BC=AC:CD.

To ieſt 1. W Tróykącie proſtokątnym, bok ieden ieſt śrzednim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtokątną i odcinkiem mu przyległym, który czyni proſtopadłá.

2. Wyſokość Tróykąta proſtokątnego, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną, między dwóma odcinkami przeciwproſtokątney.

3. Przeciwproſtokątná, dwa boki, i wysokość Tróykąta proſtokątnego, ſą w proporcyi.

227. *Zagádn:* 6. Między dwiema danemi liniiami, znaleźć śrzednią Geometryczną. *Spo-*

Sposób. 1. Złączywſzy z sobą dwie dané liniie, w jednę liniią proſtą; na niéy iako na środnicy nakréślmy półkole, i od punktu złączénia tych dwóch liniy, wynieśmy proſtopadłą aż do okręgu półkoła. Ta proſtopadłá będzie średnią proporcyonalną, któréy ſzukámy.

Sposób 2. Na większéy z dwóch danych liniy, iako na środnicy nakréślmy półkole. Na tę ſamę środnicę, od końca iéy iednégo, przenieśmy drugą mnieyſzą liniią daną, a od tego punktu, gdzie ſię na środnicy kończyć będzie, wynieśmy proſtopadłą, aż do okręgu połkoła, i punkt zeyściá ſię z półkołem złączmy liniią z punktém tym środnicy, od którégo przenieſioná była liniiá mnieyſzá daná. Ta liniiá łączącá té dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, któréy ſzukámy.

ROZDZIÁŁ IX.

O stósunkach powiérzchni Figur prostokréślnych w ogólności, a w szczególności o stósunkach Figur podobnych.

228. *Twiérdz:* 1. Gdy cztéry liniie ſą w proporcyi Geometrycznéy; proſtokąt z dwóch ſkraynych, równy ieſt proſtokątowi z dwóch środnich.

To

To Twiérdzénié trzeba naprzód obiaśnić na liczbach: ieżeli cztéry liczby ſą Geometrycznie proporcyonalné, dwie ſkrayné rozmnożoné iedna przez drugą, równé będą dwóm średnim podobnie rozmnożonym. W każdéy albowiem proporcyi Geometrycznéy równość zachodzi między dwoma ſtóſunkami Geometrycznémi, toieſt: tylé razy piérwſzy poprzednik zamykać w ſobie powinién ſwégo naſtępnika, ilé razy i drugi poprzédnik zamyká także naſtępnika ſwégo. I tak naprzykłád w téy proporcyi $6:3=8:4$, iak 6, zamyká w ſobie 3, razy 2, tak i 8 zamyká 4, razy 2. Stąd wyniká, że rozmnożénié ſkraynych i średnich wyrazów proporcyi, możná oznaczyć, przez trzy iednakowé liczby, a tém ſamém okázać równość wyrazów rozmnożonych, tak ſkraynych iako i średnich. Naprzykład, ponieważ $21:3=28:4$, i równie 21. zamyká w ſobie 3, iak i 28, zamyká 4, razy 7. a zatém tak $21=7$, razy 3, iak $28=7$. razy 4; więc 4 razy $21=4\times7\times3$; 3 razy $28=3\times7\times4$. A że $4\times7\times3=3\times7\times4$, więc i $4\times21=3\times28$.

Podobnie, ponieważ $16:12=20:15$ i tak 16 zamyká w sobie 12, iak 20. zamyká 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16=\frac{4}{3}\times12$, iak i $20=\frac{4}{3}\times15$; idzie zatém, że tak $15\times16=15\times\frac{4}{3}\times12$; iako i $12\times20=12\times\frac{4}{3}\times15$. Tak

Tak też ponieważ 8: 28=10: 35, i $8 = \frac{2}{7}\times 28$, a $10=\frac{2}{7}\times 35$; idzie zatém, że tak iest $35\times 8=35\times\frac{2}{7}\times 28$; iako też $28\times 10= 28\times\frac{2}{7}\times 35$.

W ogólności zaś mówiąc, ieżeli iest a: b=c: d; i tak a, zamyka w sobie b, iak, i c, zamyka d razy n; będzie $a=n\times b$, i $c=n\times d$, a zatém tak $d\times a=d\times n\times b$. iako - - - - $b\times c=b\times n\times d$.

Obiaśniwszy to twierdzénie na wielu przykładach, przystąpi Nauczyciel do następuiącego dowodzénia.

Táb. XIII. Fig. 3. Niech będą dwa prostokąty: ABCD, BDEF, i boki iednégo, AB, BC niech będą ſkraynémi téy proporcyi, któréy boki BD, BF drugiégo prostokąta są śrzedniémi, toiest niech się má AB: BF=BD: BC, w takim razie té dwa proſtokąty są równé.

Wykréślénié. Ustáwmy tak té dwa proſtokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B ſchodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia się w punkcie G.

Dowodz. Proſtokąty: AC, BG (w) których iednąkowá ieſt wysokość, maią się do

(w) Prostokąty zwykły się wyrázać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napisané.

do siebie, iák ich Podſtawy AB, BF. Proſtokąty także BE BG, iednakowéy wysokości, maią się do siebie, iak ich Podſtawy BD, BC. Aże z podaniá ieſt liniiá AB, do BF, iak liniiá BD : BC; więc téż i prostokąt AC tak się má do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt : AC: Proſt. BG=Proſt. BE: Proſt. BG, a zatém Proſt. AC=Prost. BE, co ſamo krócéy tak się wyrážá.

	AC: BG=AB: BF
	BE: BG=BD: BC
Aże	AB: BF=BD: BC
więc	AC: BG=BE: BG,
A zatém	AC=BE.

229. *Wzaiémnie téż* (Reciproce *albo* e converso) dowieśdź można, że ieżeli dwa Proſtokąty są równé; wziąwszy dwa boki iednégo za ſkrayné, a dwa boki drugiégo za śrzednié wyrazy proporcyi, znáydziémy między temi bokami proporcyą.

W liczbah oczywiście się to pokazuie; bo gdyby boki dwa iednégo Proſtokąta wyrażoné były przez liczby: 10. i 42. a boki drugiégo przez 15, i 28, obadwa té proſtokąty zawiérałyby w ſobie 420, naprzykład ſtóp kwadratowych, toieſt, byłoby, 10×42=15×28, ſkądby wypadła ta proporcyá: 10:15=28:42.

Wy-

Wykréślénié Geometryczné do tego Twiérdzéniá służącé, nie odmiénné byłoby od poprzedzaiącégo. Dowodzénié także we śrzodku dopiéro działaniá różniłoby się, toieſt ponieważ.

AC: BG=AB: BF
i BE: BG=BD: BC
A przez podanié AC = BE.
więc AC: BG=BE:BG
A zatém AB: BF=BD:BC

230. *Wnioſki* 1. Ponieważ w proporcyi, tenże sám bydź może naſtępnik piérwszégo ſtósunku, co i poprzednik drugiégo; naprzykład: 8: 4=4: 2. albo, 8: 4: 2, przeto kwadrat ze śrzedniéy linii Geometrycznie proporcyalnéy, równá się też Proſtokątowi z dwóch liniy ſkraynych: i znowu, ieżeli kwadrat równy iest proſtokątowi, bok kwadratu będzie liniią śrzednią proporcyonalną między bokami Proſtokąta.

Té podaniá były wyłożoné, w Rozdziáłach ſzóſtym, i ósmym, lubo ſposobém odmiénnym.

2. Możná to samo przyſtósować i do równoległoboków, chociáż nie prostokątnych, byleby kąty iednégo, równé były kątóm drugiégo: także i do Tróykątów

które

które kąt ieden spólny maią: bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Tróykąta za skrayne, a dwa drugiego za śrzednie; te dwa Tróykąty będą sobie równe: i wzaiemnie, a to ztąd wyniká, że takie Tróykąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta spólnego.

3. Przystósowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiást boku iednego, w obudwóch, wysokość oznaczaną przez prostopadłą, spuszczoną od końca boku iednego na bok drugi, tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy Podstawa i wysokość iednego będą mogły bydź wzięte za dwie linii skrayne, a podstawa i wysokość drugiego za dwie linii śrzednie proporcyonalne: i wzaiemnie, ieżeli te cztery linii będą proporcyonalne, równoległoboki będą też równe.

4. Jeżeli cztery linii są w proporcyi, można zawsze odmienić mieysce dwóm śrzednim, lub dwóm skraynym, a nawet i dwie śrzednie położyć na mieyscu dwóch skraynych, lub skrayne na mieyscu śrzednich, nie psuiąc proporcyi: ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z śrzednich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twierdz:* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem poprowadzimy dwie liniie, któreby okrąg koła przecinały po obudwóch stronach; prostokąt ze dwóch części iedney z tych liniy zawartych między tym punktem i okręgiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey liniy zamkniętych także między tym punktem, i koła okręgiem.

Táb. XIII. *Fig.* 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cieńciwy BC, ED; Prostokąt, EA×AD równy iest Prostokątowi, BA×AC.

Wykreśl: Poprowádźmy liniie, BD, EC.

Dowodz: Tróykąty BAD, EAC, są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obeymuiące ramionami swemi tenże sám łuk CD. Będą więc boki tych Tróykątów proporcyonalne; i AB: AE=AD: AC. a zatem AB×AC=AE×AD.

Táb. XIII. *Fig.* 5. 2. Niech będzie punkt A, za kołem, od tego punktu ciągniymy dwie Liniie AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a drugá w E i D. Prostokąty AB×AC, i AE×AD, będą równe.

Wykreśl: Poprowádźmy liniie BD, EC.

Dowodz.

Dowodz: Tróykąty, BAD, EAC, maią kąt A, ſpólny i kąty B, i E równé, bo wſparté ramionami na tym samym łuku CD; więc té Tróykąty maią boki proporcyonalné; i AB:AE=AD: AC, a zatém, AB×AC=AE×AD.

To Twiérdzénié zwykło się ieſzcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie ciénciwy przecinaią się w kole, części ich będą *odwrotnie* (inverse, *albo*, in ratione inversa) proporcyonalné, toiest, tak się będzie miała część iednéy ciénciwy, do części ciénciwy drugiéy; iak się ma drugá część ciénciwy drugiéy, do drugiéy części ciénciwy pierwſzéy.

Dwie tedy części ciénciwy iednéy, będą śrzedniémi proporcyi, a dwie części ciénciwy drugiéy będą ſkraynémi téyże proporcyi.

2. Gdy dwie liniie przecinaiącé koło, wychodzą od iednégo punktu za kołém; są odwrotnie proporcyonalné z częściami témi, któré za koło wychodzą, toiest, tak się má iedna przecinaiącá do drugiéy, iak się má część drugiéy za kołém, do części pierwſzéy także za kołém: iedna tedy przecinaiącá, i część iéy za kołém są śrzedniémi w proporcyi, a druga przecinaiącá, i część iey także za kołém, są ſkraynémi téy saméy proporcyi.

232. *Uwága. W piérwszym razie.* Gdy iedna z ciénciw iest śrzednicą koła, a drugá do niéy prostopadłą; ta prostopadłá na dwie równé części będzie od śrzednicy podzieloná, i Prostokąt z dwóch części śrzednicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiéy ciénciwy. Prostopadłá tedy spuszczoná od któregokolwiek punktu koła, na śrzednicę, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną między dwiéma częściami śrzednicy: który to przypádek szczególny, i wyżéy iuż iest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z liniy zamiást coby miała przecinać koło, iest *styczną* (tangens) iego, można ią uwáżać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iéy w kole niknie dlá małości, i dwa iéy punkta przecięciá schodzą się w punkt iedén.

W tym razie Prostokąt iedén, odmiéniá się na kwadrat z stycznéy. I stąd wyniká to wielkiéy wági podanié: że ieżeli od iednégo punktu, wychodzą dwie linie, iedna przecinaiącá koło, a drugá styczná z kołém, kwadrat z stycznéy równać się będzie Prostokątowi z całéy linii przecinaiącéy, i z części iéy za kołém: toiest, że styczná iest śrzednią Geometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iéy za kołém. Następuiącé, dowodzénié iest ieszcze iaśnieyszé, i bardziéy pod oczy podpádaiącé. Niech

Niech będzie AD, styczná, AB zaś przecinaiącá koło, i od tegoż samégo punktu A poprowadzoná. Ta styczná AD iest śrzednią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołém. Tab. XIII. *Fig.* 6.

Wykreśl: Od punktu dotknięciá D, poprowadźmy dwie liniie: DB, DC.

Dowodz: Tróykąty: ABD, ADC, są do siebie podobné; maią albowiém spólny kąt A, i kąt odcinka, ADC, równy katowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatém i trzeci kąt w jednym Tróykącie równy iest kątowi trzeciému w drugim: będą więc tych Tróykątów boki proporcyonalné, i AB:AD=AD:AC, toiest, kwadrat z stycznéy AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

233. W szczególności zaś niech będzie styczná AT, i przecinaiącá AD, od tegoż samégo punktu A poprowadzoná, przez śrzodek C, koła. Tab. XIII. *Fig.* 7.

Pociągniymy promień CT do punktu dotknięciá T: kwadrat z linii AC, równy będzie summie kwadratów z AT, i CT, toiest, równy będzie summie z Prostokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Skąd wyniká tén wniosek, że ieżeli śrzednicę BD, podzielimy na dwie równé części w punkcie C, i potém na iey przedłużéniu, weźmiémy iakikolwiek punkt na

N2 przy-

przykład A; Prostokąt z całéy téy linii i z iéy przedłużéniá (AD×AB) z przydanym kwadratém, z połowy śrżednicy (BC^2) równać się będzie kwadratowi i linii złożonéy z połowy śrzednicy, i z iéy przedłużéniá (AC^2) toiest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagád*: 1. Maiąc dany Prostokąt, i kwadrat, znaléźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią, tén Prostokąt i kwadrat.

Rozwiąz: Zamiéńmy Prostokąt dany na inszy iému równy, któryby za bok iedén, miáł bok kwadratu: czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwártéy proporcyonalnéy, iak się má kwadrat do Prostokąta.

To postępowanié zgádzá się zupełnie z tém, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (*na karcie* 89. *i* 90.) a co tu przez różné przykłady, podobné następuiącému obiaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spólną miarę, albo za iedność, niechby bok iedén Prostokąta, zawiérał w sobie 5. razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwártá liniiá proporcyonalná do boku tego

tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawiérałaby w sobie 35. razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawiérałby w sobie 35. razy cały kwadrat.

235. Przystósowanié. Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc znaléźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią dwa Prostokąty, toiest, szukać będziémy czwártéy proporcyonalnéy do boku iednégo Prostokąta, i dwóch boków drugiégo: do téy albowiém czwártéy proporcyonalnéy tak się mieć będzie drugi bok piérwszégo Prostokąta, iak się maią powiérzchnie tychże Prostokątów.

Możnáby to samo wykonać, szukaiąc sposobém wyżéy wyrażonym (234) stósunku każdégo z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiém, że powiérzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwárté proporcyonalné do boku kwadratu, i dwóch boków każdégo z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykłád znaleźli, że Prostokąt iedén, który nazywám P. zawiérá w sobie kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá L, zawiérá w sobie bok B, kwadratu, toiest, że P:K=L:B.

Niech-

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiéra w sobie tén sám kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá M, zawiéra w sobie bok B tegoż kwadratu, toiest, że Q:K=M:B. Wnoszę stąd, że Prostokąty P, Q, tylé razy zawiérać będą ieden drugi, ilé razy się zawiéraią linie L. M. iedna w drugiéy, toiest, że będzie, P:Q=L:M.

Jakoż ieżeli proſtokąt P. zawiéra w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiéra naprzykład 6. razy kwadrat K: Prostokąt Piérwszy, będzie do Proſtokąta drugiégo, iak są liczby; 2, 3, 4, i t. d. do liczby 6. A że też i liniiá L. zawiéra w sobie bok, B. 2. 3, 4, i t. d. razy; więc też i liniiá M zawiérać będzie bok B, razy 6. a zatém tak się má Proſtokąt P, do Prostokąta Q, iak liniiá L, do linii M.

Jeżeli tedy mámy dwie proporcye n p.
P: K=L: B.
i Q: K=M: B.

W których iednakowé są następniki; poprzedniki piérwszé obudwóch proporcyy tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugié tychże proporcyy, toiest,
P:Q=L:M.

236. *Uwága.* W jednéy z dwóch dopiéro wyrażonych proporcyy, na przykład w dru-

w drugiéy, można było odmienić mieyscé poprzednikóm, i następnikóm, i té samé proporcye tak wyrazić?

P: K=L:B.

K: Q=B:M.

Skąd wyniká P: Q=L:M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiékolwiek ilości iednakowégo gatunku stósunek piérwszéy z nich, do trzeciéy nazywá się *stósunkiem składanym* (ratio composita) z stósunku piérwszéy ilości, do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy. Jtak stósunek P. do Q, nazywá się składanym z stósunku P do K, i K do Q; Tak téż stósunek L do M będzie składanym z stósunku L do B, i B do M. Takié stósunki złożoné z stósunków równych są równé. I tak ponieważ stósunek P do K, i K do Q równy iest piérwszy stósunkowi L do B, drugi stósunkowi B do M; będzie téż i stósunek składany P do Q równy stósunkowi składanému L do M.

238. *Przyst:* 1. To, co się tu powiedziało o stósunku składanym, dobrze będzie przystósowáć do reguły trzech składanéy, o któréy mówiło się w Arytmetyce.

Przykład: Rzémieślnicy z jednakową pilnością prácuiący około iakiéy roboty, tym więcéy iéy zrobią, im większá będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony

na

na téyże robocie. Przeto gdy porównać chcémy dwie iednakowégo gatunku roboty, którémi się dwie kupy Rzémieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako się to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzémieślników przez liczby dni, przez które prácowali; a roboty przez tych Rzémieślników wygotowané, tak się będą do siebie miały, iak się maią tamté dwie liczby rozmnożoné.

Niechby naprzykłád liczby Rzémieślników były do siebie, iak 2. do 3; a czasy przez które robili iak 5. do 7. Piérwszy stósunek 2. do 3. równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5. rozmnożonych, i będzie, iak 10. do 15. Drugi stósunek 5. do 7, równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3. rozmnożonych, i będzie iak 15: do 21. A zatém stósunek robót, który się równá stósunkowi 10. do 21, równy będzie stósunkowi składnému z stósunku 10. do 15, i 15, do 21; z których piérwszy równy iest stósunkowi 2. do 3, a drugi równy stósunkowi 5. do 7.

Podobnie rozumować możná, gdy więcéy niż dwa będzie stósunków.

239. *Przystó: 2.* Wszystkié także działaniá o zamianach, i inné podobné, którémi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasádzały się na stósunkach złożonych

z dwóch

z dwóch lub więcéy stósunków równych: iako to bardzo łatwo w przykładach okázać możná.

240. *Przystd*: 3. Samé nawet niektóré działaniá, które zdą się bydź tylko zwyczaynem mnożéniem, można podciągnąć pod stósunek składany.

Przykład 1. 15. Czerwonych złotych iléż czyni groszy Polskich?

Aby znaléźć wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obrácaią się czerwoné złote na złote, a té potém na grosze. Rozwiążémy teraz to zadanié, rozkładaiąc ié na stósunki poiedyncze, i szukaiąc stósunku z nich złożonégo, a to dlá pokázaniá, że czasém i nie myśląc o tém, używámy w saméy rzeczy stósunku składanégo.

Stósunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składá się z stósunków następuiących:

1. Wartość 15. czer: zł: do wartości 1. czer: zł: iest, iak - - 15. do 1.

2. Wartość 1. czer: zł: do wartości 1. złotégo iak - - - 18. do 1.

3. Wartość 1. złotégo do wartości 1. groszą iak - - - 30. do 1.

4. Stósunek z tych trzech złożony iest iak - - - - 8 100 do 1.

Więc

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - - 8 100.

Przykład 2. Osoba 30. lát maiącá, iléż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stósunek 30. lát do iednéy minuty składá się z stósunków następuiących:

Z Stósunku 30 lát do 1. roku, toiest, - - - - - 30 do 1

Z Stósunku 1. roku do 1. dnia, toiest; - - - - - 365 do 1,

Z Stósunku 1. dnia do 1. godziny, toiest, - - 24 do 1,

Z Stósunku 1. godziny do 1. minuty, toiest, - - 60 do 1,

Stósunek z tych wszystkich złożony iest - 15768000. do 1.

A zatém w 30 latach iest minut - - - 15768000.

241. *Przystós*. 4. Widzieliśmy wyżéy że dlá znalezieniá stósunku dwóch Prostokątów, trzeba było iedén z nich zamienić na inszy, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaléźć czwártą liniią proporcyonalną do iednégo boku iednégo Prostokąta, i dwóch boków drugiégo: i że tak się má pierwszy Prostokąt do drugiégo, iak się má drugi bok pierwszégo

wszégo prostokąta, do téy czwártéy linii proporcyonalnéy. Zwyczaynie to podanié tak się wyráżá: *że ſtósunek dwóch Proſtokątów ſkłádá się z stósunków ich boków.* Co tak okázać możná.

Niech będą dwa boki iednégo Proſtokąta nazwané, A i B, a dwa boki drugiégo proſtokąta, C i D. Szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy trzem bokóm B, C, D, i ta niech będzie L, toiest niech będzie, B:C=D:L, ſtósunek linii A, toiest, drugiégo boku piérwszégo proſtokata, do L, równy będzie ſtósunkowi piérwszégo proſtokąta, do drugiégo (235.) A że ſtósunek A do L ſkłáda się z stósunków, A do D, i D do L; ſtósunek zaś A do D, iest ſtósunkiém boku iednégo, iednégo Proſtokąta do boku drugiégo, drugiégo Proſtokąta, a ſtósunek D do L, równá się ſtósunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było, B:C=D:L:) *więc ſtósunek dwóch Proſtokątów, ſkłádá się z ſtósunków ich boków.*

242. *Przyſt.* 5. Gdy dwa Proſtokąty, które z sobą porównywać mámy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszyſtkié równé; kwadrat iedén tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má bok iedén piérwszégo kwadratu do trzeciéy linii proporcyonalnéy z tym bokiém, i z bokiém drugiégo kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch

kwa-

kwadratów, a C, niech będzie liniiá trzeciá proporcyonalná do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się má A do C.

243. *Defin.* Ten ſtósunek A do C, ſkłádá się z ſtósunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa oſtatnie ſtósunki są równe: bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak ſtósunek z nich złożony, nazywá się *dwumnożnym*, (Ratio duplicata), że wykładnik iego, iest kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwszych ſtósunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1 do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym ſtósunku, w którym ieſt 1. do 4; trzeciá też liniiá proporcyonalná do 1. i 2, ieſt 4: a zatem te dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się má bok iednego z nich do trzeciey linii proporcyonalney.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2, do 3, powierzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzeciá też liniiá proporcyonalná do 2 i 3, iest: $\frac{9}{2}$ a ſtósunek 2 do $\frac{9}{2}$ ieſt ten sám, co i ſtósunek 4 do 9.

Jako ſtósunek pierwſzey naprzykład linii do trzeciey *ciągło* (continue) proporcyonal-

nalnéy, nazywá się ſtósunkiém dwumnożnym ſtósunku piérwszéy linii do drugiéy; tak znowu ſtósunek piérwszéy téy linii do drugiéy, nazwać można ſtósunkiém *dwudzielnym* (ratio subduplicata) ſtósunku linii piérwszéy do trzeciéy. J tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczoné: 1, 2, 4, są ciągło proporcyonalné, toieſt, 1 do 2, iak 2 do 4: albo 1: 2; 4. Ponieważ piérwszá do trzeciéy, toieſt, 1 do 4 ieſt w ſtósunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy, toieſt iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2. w ſtósunku dwudzielnym 1, do 4, toieſt, iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagádn*: 2. Maiąc dany kwadrat ieden, znaléźć drugi, któryby do piérwszégo był w danym ſtósunku.

Rozwiąz: Danému ſtósunkowi znáydźmy inszy równy, maiący za poprzednika bok kwadrata danégo. Między tym poprzednikiém, i naſtępnikiém iego, szukáymy śrzedniéy proporcyonalnéy, ta będzie bokiém kwadratu żądanégo.

Albo tak: Złączmy wpróſt z sobą dwie liniie, maiącé do siebie tén sám stósunek, który maią dwa wyrazy, naprzykłád dwie liczby dané. Na téy linii ze dwóch złożonéy, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole, i od punktu ich łączéniá się wynieśmy proſtopadłą, aż do okręgu. Od punktu zeyściá się proſtopadłéy z okręgiém poprowádź-

wádźmy dwie liniie do dwóch końców śrzednicy; kwadraty tych dwóch liniy mieć będą do siebie ſtósunek; a zatém ieżeli iedna z nich równá ieſt bokowi kwadratu danégo; równá będzie bokowi kwadratu, którégo ſzukámy. Jeżeli zaś piérwszá nie równá ieſt bokowi kwadratu danégo; to trzeba na niéy, zacząwſzy od punktu iéy przecięciá z okręgiém, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danégo i od punktu naznaczonégo prowadzić równoodległą od śrzednicy, a ta równoodległá przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanégo.

To Zagádniénié przyſtósować należy do przykładów Arytmetycznych.

Przykłád: 1. Znaléźć kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danégo, toieſt, któryby tak sie miáł do niego, iak 3, do 5.

Bok kwadratu danégo dzielę na dwie części, któréby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na śrzednicy kreślę półkole, a od punktu podziáłu wynoſzę proſtopadłą aż do iéy spotkaniá się z okręgiém. Od tego punktu ſpotkaniá prowadzę liniią do końca śrzednicy, w tę ſtronę, gdzie część iéy większá znáyduie się. Ta liniiá będzie bokiém kwadratu szukanégo.

Przy-

Przykład: 2. Maiąc dany kwadrat dobrać mu drugi, któryby tak się miał do niego, iak 5, do 3.

Liniią równą bokowi danégo kwadratu przeciągniymy daléy, aż takich 5. części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nie przeciągniona zamykała.

Na téyże linii tak przeciągnionéy, iak na śrzednicy nakréślmy półkole, i od punktu, od którégo ieſt przedłużoná, wynieśmy proſtopadłą aż do okręgu, i od tego punktu, gdzie go ſpotyká, poprowádźmy liniią do końca tego śrzednicy, gdzie część iéy równá się bokowi danégo kwadratu. Ta oſtatniá liniiá będzie wymiarém boku kwadratu, którégo szukámy.

245. *Uwága*. Rozwiązanié Arytmetyczné takowych zagádnień zasádzá się na wyciągniéniu piérwiáſtku kwadratowégo.

Gdy na przykład znaléźć potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$ kwadratu danégo, toieſt, któryby tak się miał do niego iak 3 do 5; rozmnożywszy obiedwie té liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do 25; więc kwadrat, którégo ſzukámy tak się mieć będzie do kwadratu danégo, iak 15. do 25: a zatém bok kwadratu, którégo ſzukámy, będzie do boku kwadratu danégo, iak ieſt liczba, którá przez siebie rozmnożoná czyni 15, do liczby, którá przez

przez siebie rozmnożoná czyni 25: toiest, iak pierwiástek kwadratowy z 15. do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiástek kwadratowy z 15, i tén pokáże wielkość boku kwadratu ſzukanégo, toiest trzeba znaléźć średnią liczbę proporcyonalną między dwiéma danémi, 3 i 5: rozmnożywſzy iedné przez drugą, i z rozmnożonéy liczby 15, pierwiástek kwadratowy wyciągnąwszy.

Dziáłanié więc Geometryczné zmierzaiącé do znaleziénia średniéy linii proporcyonalnéy między dwiéma danémi, ieſt to samo, co w Arytmetyce wyciąganié pierwiáſtku kwadratowégo z liczby danéy: co można i tém potwiérdzić, że kwadrat liczby średniéy Geometrycznie proporcyonalnéy między dwiéma inszémi, równá się tymże dwóm liczbóm przez siebie rozmnożonym: a zatém ta średniá liczba znáydzie się, wyciągaiąc pierwiáſtek kwadratowy z tych dwóch liczb, iednéy przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżéy Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwadratu danégo w danym ſtósunku; szukaliśmy przez wykreśléníé, średniéy linii Geometrycznie proporcyonalnéy między dwiéma w danym ſtósunku będącémi, i ta średniá liniiá była bokiém kwadratu szukanégo.

246. Przyſtósować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do inszych iakichkolwiek figur proſtokreślnych, i do siebie podobnych. Pokáże się to naprzód na Proſtokątach podobnych, potém na Tróykątach, naoſtatek w ogólności na iakichkolwiek figurach proſtokreślnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobné, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących sobie zrobimy dwa kwadraty; té dwa Proſtokąty, tak siebie mieć będą, iak té dwa kwadraty.

Niech będą dwa proſtokąty podobné, ABCD, abcd; ich powiérzchnie, tak się do siebie mieć będą, iak się maią powiérzchnie kwadratów ABEF, abef, zrobioné na bokach odpowiadaiących sobie; AB, ab. Jakoż Proſtokąt ABCD, tak się má do kwadratu ABEF, iak wysokość AD do wysokości AF=AB, toieſt. Táb. XIV. *Fig.* 1.

ABCD: ABEF = AD: AB.

Podobnie abcd: abef. = ad: ab.

Aże dlá podobiéńſtwa proſtokątów, iest też AD: AB = ad: ab, więc

ABCD: ABEF = abcd: abef.

albo ABCD: abcd = ABEF: abef.

To samo ieszcze wyłożyć można sposobém naſtępuiącym:

Tab. XIV. Fig. 2. Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym stósunku 5 do 3: a zatem ieżeli podzielimy iednę podstawę na 5, a drugą na 3, równe części, wysokość także, iednę na 5 części a drugą na 3 równe pierwszym; równych, powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły bydź podzielone, pierwsza na 25, a druga na 9 części równych w obudwóch Prostokątach, tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby bydź podzielone, ieden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików: Stąd wypływa, że i Tróykąty prostokątne podobne, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie: bo takie Tróykąty są w samey rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących też samę, co one, podstawę i wysokość.

247. Można ieszcze przystósować to samo i do iakichkolwiek Tróykątów podobnych: ponieważ albowiem w podobnych Tróykątach, wysokości są między sobą, iak Podstawy; zatém prostokąty, któreby miały tey wielkości podstawy i wysokości, co i Tróykąty, byłyby podobne i miałyby się do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246); więc i Tróykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie

w stó-

w stósunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniéy to wyłożyć można, gdy stósunki boków wyrażone będą przez liczby.

Niech będzie Tróykąt iakikolwiek, którégo podwoiliśmy wszystkié trzy boki. Tén drugi Tróykąt zmieści w sobie 4 Tróykąty, z których każdy przystanie do piérwszégo. Táb. XIV. *Fig.* 3.

Jeżeli w tymże piérwszym Tróykącie bok każdy potroimy; tén drugi Tróykąt zamknie w sobie 9. Tróykątów, z których każdy przystanie do piérwszégo.

Jeżeli znowu każdy bok w piérwszym Tróykącie tak przedłużymy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; tén drugi Tróykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d. Tróykątów, mogących przystać do piérwszégo.

Przeto, ieżeli boki Tróykąta iednégo zawiéraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innégo Tróykąta; powiérzchnią piérwszégo Tróykąta zawiérać będzie powiérzchnią drugiégo, 1,4,9, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Podobnie, powiérzchnie kwadratów, których boki zawiéraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. - - razy bok innégo kwadratu, będą

zawiérać powiérzchnią tego drugiégo kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Gdyby boki dwóch Tróykątów podobnych miały się na przykład do siebie, iak 5, do 7; możnáby w piérwszym Tróykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Tróykątów, których wszyſtkich boki przyſtaćby mogły do siebie; a zatém powierzchnie tych dwóch Tróykątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49, toiest, iak powiérzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samégo dowieśdź sposobém podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty maią się do siebie w ſtósunku dwumnożnym ich boków, (242)

I tak, gdy będą dwa iakiékolwiek Tróykąty podobné, do których dwóch boków odpowiadaiących sobie, znáyduiémy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powiérzchnia iednégo Tróykąta, tak się mieć będzie do powiérzchni drugiégo, iak bok piérwszégo Tróykąta, który wzięty ieſt za piérwszy wyráz proporcyi, do téy trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Táb. XIV. Fig. 4. Niech będą dwa Tróykąty podobné, ABC, abc, znáydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę

samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powiérzchniá Tróykąta ABC, będzie do powiérzchni Tróykąta abc, iak AB do AD.

Wykréślénié. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ dlá popobieństwa Tróykątów ieſt AB: ab=AC: ac, a przez wykréślenié AB: ab=ab: AD, będzie więc, AC: ac=ab: AD: a zatém Tróykąty cab, CAD, maią kąty A i a równé, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalné: będą tedy té dwa Tróykąty równé co do powiérzchni, a przeto ſtósunek Tróykąta ABC, do każdégo z nich będzie iednakowy. A że ſtósunek tegóż Tróykąta ABC, do Tróykąta ADC, równy ieſt ſtósunkowi linii AB, do linii AD; więc też i Tróykąt ABC tak się mieć będzie do Tróykąta abc, iak liniiá AB do linii AD, toieſt, w ſtósunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie ſtąd, że i równoległoboki podobné są także między sobą w ſtósunku dwumnożnym ich boków: ponieważ takié równoległoboki dwa razy w sobie zamykaią Troykąty podobné.

248. Można także było równie dokładnie dowieśdź, że Tróykąty podobné ABC, abc, są między sobą w ſtósunku dwumnożnym ich boków AC, ac: a zatém, że ſtósunek dwumnożny AB do ab, równy ieſt

ſtó-

ſtósunkowi dwumnożnému AC, do ac, toiest, że ſtósunki dwumnożné z równych ſtósunków, są równé: co téż iuż się ogólnie pokázało, mówiąc wyżéy o ſtósunkach ſkłádanych z jnszych ſtósunków.

Jakoż niech będą trzy iakiékólwiek ilości ciągło proporcyonalné, A, B, C, i drugié trzy ciągło także proporcyonalné, a, b, c, i w równym z pierwszémi stósunku. Stósunek ſkłádany A do C, równy będzie ſtósunkowi, ſkłádanému *a* do *c*, toieſt, A; C=a: c.

Bo ponieważ ſtósunek A do B równy wzięliśmy ſtósunkowi a do b, będzie.

$$A:B=a:b;\ \text{A że}\ A:B=B:C$$
$$\text{i}\ a:b=b:c$$

Więc $B:C=b:c$

a zatém $A:C=a:c$

W liczbach to samo iaśniéy się okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalné 8, 4, 2, i drugié trzy ciągło także i równie proporcyonalné, 12, 6, 3, będzie, 8: 2=12: 3.

Ponie-

Ponieważ albowiém równé są ſtósunki 8 do 4, i 12. do 6, będzie.

8: 4 = 12: 6; A że, 8: 4 = 4: 2
i 12: 6 = 6: 3.

Więc 4: 2 = 6: 3
A zatém 8: 2 = 12: 3.

249 *Podanié przybrané:* Gdy mámy iakiżkolwiek zbiór ſtósunków równych, których wyrazy wszyſtkié iednakowégo są gatunku; summa wszyſtkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszyſtkich naſtępników, iak każdy w szczególności poprzednik, do swégo naſtępnika.

Bo ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztéry i t. d. razy, zamyká w sobie swoiégo następnika; wszystkié téż razém poprzedniki zamykać będą wszystkié razém następniki dwa, trzy, cztéry i t. d. razy: a zatém summa wszystkich poprzedników, tylé razy zamykać będzie summę następników, ilé każdy z osobna poprzednik, swégo następnika.

I tak niech będą równé stósunki, 64 do 32. 50 do 25. 42 do 21. 30 do 15. 24 do 12. 18 do 9. 10 do 5. 8. do 4. 6 do 3. 4 do 2. 2 do 1. Summa wszystkich

kich poprzedników $=258$, a summa wszystkich następników $=129$; będzie tedy, $258:129=64:32$: albo $=50:25$; albo $=42:21$ i t. d.

250. *Twierdzenie* 3. Jakiezkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Tab. XIV. Fig. 5. *Wykreśl*: Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowadźmy przekątne do inszych kątów, do których mogą bydź poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Tróykąty, które z osobna brane w jedney figurze, będą podobne Tróykątóm odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś w szczególności Tróykąt w jedney figurze, będzie do Tróykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Tróykąty, z których się składa iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie tróykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatem summa wszystkich Tróykątów, które składaią iednę figurę, toiest (ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Tróykątów, z których się składa druga figura

(toiest

(toiest do téy drugiéy całéy figury), iak się ma każdy w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, do Tróykąta odpowiadaiącégo w drugiéy figurze, toiest, w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszystko zatém, cokolwiek się powiedziało o stósunku dwóch kwadratów i o sposobie znaleziénia kwadratów, któreby się miały do siebie w danym stósunku, może bydź przystósowané do iakichkolwiek figur prostokréślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokréślną zrobić podobną i równą danym dwóm inszym podobnym figurom prostokréślnym; trzeba tym końcém postawić Tróykąt prostokątny, dawszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiącé sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostkątná tego Tróykąta, będzie bokiém odpowiadaiącym w figurze, któréy szukamy.

252. Gdy cztéry linije składaią proporcyą, i na dwóch piérwszych, wyrażaiących ieden stósunek, zrobimy dwie iakiekolwiek figury podobné, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stósunek, zrobimy inszé dwie iakiekolwiek figury podobné; w takim razie stósunek dwóch piérwszych figur, równy będzie stósunkowi

kowi dwóch drugich, bo tak stósunek dwóch pierwszych figur, iako i stósunek dwóch drugich, iest stósunkiem dwumnożnym ze dwóch równych stósunków.

Prawdzi się to w szczególności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tém widoczniey ieszcze się okázuie, gdy té cztery figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniiami, Prostokąt z poprzedników dwóch pierwszych stósunków, w każdéy proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stósunków do Prostokąta z jchże następników.

Należy to obiaśnić naprzód na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stósunków, w obudwóch proporcyach, ieden przez drugi rozmnożone, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i insze dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14:7.=6:3.$
i znowu $15:5=12:4.$
będzie też $14\times15:7\times5=6\times12:3\times4.$
toiest. $210:35=72:12.$

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze stwiérdzić rozumowaniém podobném następuiącému. Jeżeli poprzednik w piérwszéy proporcyi iest dwa razy na przykłád większy od swégo następnika, a poprzednik w drugiéy proporcyi, trzy razy na przykłád iest większy od swégo także następnika; tedy rozmnożywszy piérwszégo poprzednika, piérwszéy proporcyi, przez piérwszégo poprzednika drugiéy proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, toiest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników piérwszych, w obudwóch proporcyach rozmnożonégo; a że i drugié dwa poprzedniki, są, ieden dwa razy, a drugi trzy razy, większé od swoich następników; więc tak piérwszy poprzednik ze dwóch piérwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik ze dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiégo następnika podobnie rozmnożonégo; które to rozumowanié przystósować można i do każdégo inszégo wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztéry linije składaiącé piérwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d, wyrażaią drugié cztéry linije składaiącé drugą proporcyą, toiest: niech będzie, $A:B=C:D$. i $a:b=c:d$; będzie też $A\times a:B\times b=C\times c:D\times d$. Bo

Bo náprzód $A : B = Aa : Ba$.
i podobnie $C : D = Cc : Dc$.
A że - $A : B = C : D$.
Więc - - - $Aa : Ba = Cc : Dc$.
Tak też znowu; $a : b = Ba : Bb$.
$c : d = Dc : Dd$.
A że - $a : b = c : d$
Więc - - - $Ba : Bb = Dc : Dd$.
Stósunek tedy złożony z stósunków:
$Aa : Ba$.
i $Ba : Bb$.
Toiest stósunek $Aa : Bb$, równá się stósunkowi złożonému z stósunków
$Cc : Dc$.
i $Dc : Dd$.
Toiest stósunkowi, $Cc : Dd$.
albo co na iedno wychodzi, $Aa : Bb = Cc : Dd$.

ROZDZIÁŁ X.

O wielokątach forémnych.

254. *Defin*: Gdy wielokąt má wszystkie boki i kąty równe; nazywá się *Wielokątem forémnym* (Polygonum regulare.)

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razém kątów wielokąta, zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkie kąty wielokąta są równe, ważność iednego z tych kąta, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Stąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową maiące liczbę boków, kąty też wszystkie maią równe, i boki proporcyonalne; są więc do siebie podobne. Można tedy przystósować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiémy iuż sposób wykréśleniá Tróykątą równobocznego i kwadratu na linii daney; wiémy też iak wpisać w Tróykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanie w koło dane, Tróykąta równobocznego, i opisanie tegoż koła Tróykątém, łatwiéy się wykonywá przez wykréślenie *Sześciokąta* forémnego (Hexagonum.)

256. *Twierdz:* 1. Bok sześciokata w koło wpisanego, równy iest promieniowi tegoż koła.

Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta n.p: AB, równy iest promiéniowi SB tegoż koła. Táb. XV. *Fig. 2.*

Wy-

Wykréślénie. Poprowádźmy promień SA.

Dowodz: Kąt ASB, zamyká szóstą część, cztérech kątów prostych, toiest $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo: a że trzy kąty Tróykąta ASB, składaią dwa kąty prosté; więc dwa kąty A i B tegoż Tróykąta, razém wzięté są różnicą między dwóma kątami prostémi i $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo, toiest, czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostégo. Ponieważ zaś té dwa kąty są sobie równé; więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostégo: a zatém wszystkié trzy kąty Tróykąta ASB są równé, i dla tego téż i boki wszystkié trzy równé będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta forémnégo (czyli ciénciwa 60. stopniów) równy promiéniowi koła opisanégo.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt forémny w koło dané, dosyć iest przénieść 6. razy, iako ciénciwę, promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona ciénciwą trzeciéy części okręgu koła, a zatém będzie bokiem Tróykąta równobocznégo wpisanégo w dané koło. Pociągnąwszy tedy linie AE, CE, Tróykąt ACE, będzie Tróykątem równobocznym w koło wpisanym.

259.

259. *Twiérdzéń*: 2. Gdy w koło wpisany będzie Tróykąt równoboczny, a przez wiérzchołki kątów iego, pociągniémy styczné z kołém tak daleko, aż się z sobą znidą; té styczné zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Tróykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wiérzchołki A, B, C, tego Tróykąta prowadzoné styczné koła, aż do spotkaniá się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany. Táb. XV. *Fig.* 2.

Wykréśléníé. Pociągniymy promiénie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w śrzodku koła, naprzykład kąt ASB, i iému przeciwny kąt E, między dwiéma stycznémi zawarty, czynią razém dwa kąty prosté. A że kąty wszystkié trzy we śrzodku koła są równé; więc równé będą i kąty trzy od stycznych zrobioné; a zatém i Tróykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dané koło Tróykątém równobocznym, wpisáwszy piérwéy w toż koło Tróykąt także równoboczny.

260. W ogólności zaś mówiąc: niech-

by

by był iakikolwiek wielokąt forémny w koło wpiſany; ieżeli przez wszystkié wierzchołki kątów tego wielokąta poprowadzimy styczné koła, tak, aby każdé dwie blizkié z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także forémnym.

Dowodz: We wszystkich czworokątach takich, iak na przykład ASBE, kąty między dwiéma styczné mi zawarté, iak na przykład kąt E, będą równé, a zatém wszystkié kąty tego Wielokąta będą równé.

Wszystkié także Tróykąty, iak na przykład ABE będą równoramienné, i kąty w jednym Tróykącie, równé będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak na przykład iest podstawa AB, będą równé: a zatém wszystkié te Tróykąty mogą przystać do siebie, i stąd boki iednégo Tróykąta równé będą bokóm drugiégo. Więc summa dwóch takich równych boków iednakową zawsze będzie. A że na przykład EF iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanégo; więc wszystkié boki tego Wielokąta równé będą.

261. *Twiérdz:* 3. W każdy Wielokąt forémny, można wpisać iedno koło, i drugié koło na nim opisać, a obadwa té koła, spólny mieć będą śrzodek.

Niech

Niech będzie iakikolwiek ſześciokąt foremny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugie na nim opisać, a te dwa *koła* będą *ſpółśrzodkowe*. (circuli concentrici.)

Dowodz: Od śrzódka dwóch boków blizkich, na przykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie proſtopadłe: GS, HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków blizkich A, B, C (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołem Tróykąta) będą tedy równe liniie AS, BS, CS; a zatem Tróykąty SBC, SBA równe względem siebie boki mieć będą, i ieden Tróykąt przyſtać może do drugiego: a w szczególności kąt SBC, równy iest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to-iest kąta ABC. A że też równe są i kąty SCB, SBC; więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatem kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Tróykąty: SCD, SCB ſpólny bok: SC, równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Tróykąty przystać do siebie, a w szczególności liniie SB, SD równe będą. Więc to koło, którego śrzodkiem iest S. i które przechodzi przez punkta blizkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący: D. Podobnym ſposobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, prze-

Táb. XV. Fig. 3.

P cho-

chodzić będzie i przez punkt E, i t. d.

Wszyſtkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało: a zatem dwa Tróykąty na przykład SBH, SBG, mogą przyſtać do siebie, bo maią kąty proste przy H i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności linie SH, SG są równe; toż samo możnaby dowieśdź i względem inszych prostopadłych spuszczonych od śrzodka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatem iest śrzodkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz:* 4. Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cięciwą, iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy linie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych liniy inszy wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cięciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podſtawie Tróykątów równoramiennych, i przystać do

siebie

siebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Tén tedy Wielokąt, bedzie miáł wszyſtkie boki i kąty równé, a zatém będzie forémnym.

Podobnym ſposobém dowiéśdź możnáby, że ieżeli boki Wielokąta, są ciénciwami tyluż części równych koła, ilé Wielokąt má boków; tén Wielokąt będzie forémnym: a zatém wykreślénie Wielokąta forémnégo, któryby zamykáł w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagádn:* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dané koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątné w kwadracie: punkt przecięciá ich, będzie śrzodkiém koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mámy.

2. Prowadzę dwie śrzednice w kole, iednę do drugiéy proſtopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącégo: przez té wierzchołki pociągnąwszy styczné koła, té zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na

kole, równá się kwadratowi śrzednicy iego, i dwa razy ieſt większy od kwadratu wpisanégo.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżéy powiedziało, wyniká, że przez *poddziáły*, (subdivisiones) ciągłé łuków na dwie części równé, można wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby naſtępuiąca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności. - - - - 3×2^{n}. (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności. - - - - 4×2^{n}.

Przeſtr. Za pomocą samégo liniiału i Cyrkla nié można z zupełną dokładnością i pewnością, (to iest bez szukaniá takowégo podziału cyrklém) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych: a zatém z takową samą pomocą, nié można zawsze wykreślić takié Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożné, z 3. lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcéy razy wzięté.

266. *Twiérdz*: 5. Powiérzchniá Wielokąta opisanégo na kole, a w szczególności

---

(x) Co znaczą té wyrazy: 3×2^{n}, 4×2^{n}. dá się poznać w Algiebrze.

ści Wielokąta forémnego równá się Tróykątowi maiącému za wysokóść promień tego koła, a za podſtawę *obwód* (Perimeter) tego Wielokąta

Wykréśl. Od śrzodka koła poprowádźmy liniie do wſzyſtkich wiérzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez té liniie, na tylé Tróykątów, ilé má boków; Tróykąty zaś té maią za wysokość promień koła, a za podſtawę boki Wielokąta; więc powiérzchniá tych wszystkich Tróykątów, czyli powiérzchniá Wielokąta równá iest iednému Tróykątowi, któryby miáł za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta.

267. *Wniosek.* Gdy rozmaité Wielokąty opisané są na iednem kole; ich powiérzchnie mieć się do siebie będą, iak obwody.

268. *Twiérdzénié 6.* Powiérzchniá Wielokąta forémnégo, w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta inszégo forémnégo w toż koło wpisanégo, a tylko połowę tylé boków maiącégo.

Nie-

Táb. XV. Fig. 1. Niecháy na przykład sześciokąt ABCD EF, wystawiá nám iakikolwiek Wielokąt foremny, w koło wpisany, powierzchniá tego sześciokąta równá iest Tróykątowi maiącemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Tróykąta równobocznego, w toż samo koło wpisanego.

Dowodz: Poprowádźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Tróykąta równobocznego. Tróykąt ASB, uwáżać można, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość AG, Tróykąt także CSB uwáżać można, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość CG: a zatem czworokąt AS CB równá się Tróykątowi, któryby miáł albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić i o inszych Czworokątach, zawartych między dwóma Wielokąta bokami przyległemi, i dwoma promieniami; summa więc powierzchni, wszystkich tych czworokątów, toiest powierzchniá Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równá się takiemu Tróykątowi, któryby miáł za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta inszego foremnego, w toż koło wpisanego, a połowę tyle boków maiącego.

Przykład. Powierzchniá Dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, równá się Tróykątowi, maiącemu za wysokość,

pro-

promień tego koła, a za podstawę obwód sześciokąta, w toż koło wpisanégo, albo, (co na iedno wychodzi) równá się Prostokątowi, któryby miáł za wysokość, promień tego koła, a za podstawę, ténże promień trzy razy wzięty.

Ta więc powiérzchniá iest trzy razy większá od kwadratu promiénia, i iest równá $\frac{3}{4}$ kwadratu śrzednicy.

Twiérdzénié to stósuie się tylko do Wielokątów, których boki są párzysté; następuiącé Twiérdzénié przystósowáć można do wszystkich ogólnie Wielokątów forémnych.

269. *Twiérdz:* 7. Powiérzchniá Wielokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość prostopadłą spuszczoną od śrzodka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwód iego. (y)

Dowodz: Prostopadłą tę uważáć można, iák promień koła wpisanégo, lub wpisać się mogącégo w Wielokąt: a zatém twiérdzénié to iest tylko przystósowaniém wyższégo (266.)

270.

(y) Taká w szczególności prostopadła nazywá się z Greckiégo apothema.

270. *Wniosek.* Jeżeli od punktu iakiégokolwiek w Wielokącie forémnym, nawet i w tym, którégo boki tylko wszystkié są równé, spuścimy prostopadłe do wszystkich iego boków; té prostopadłé dodané do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samégo punktu dwie linie do dwóch końców iednégo z boków, powiérzchniá Tróykąta, témi liniiami zakończoná, równá będzie Tróykątowi maiącému za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną: albo, co na iedno wychodzi, powiérzchniá ta równá będzie Tróykątowi maiącému za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną: a zatém powiérzchniá całégo Wielokąta równać się będzie Tróykątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na boki iego spuszczonych. A że powiérzchniá takowégo Tróykąta iest zawsze iednakowá, i wysokość także iednakowá; więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakowá zawsze będzie, z którégokolwiek punktu Wielokąta, oné spuścimy.

WSTĘP

WSTĘP DO ROZDZIAŁÓW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cyrkla proporcyonalnego, i o Podziele nazwanym Nonniuszém.

271. *Defin. Przenośnik* (Transportator) Táb. XVI.
iest to półkolé, którégo okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na pólstopnie, i ćwierci stopniów.

272. *Zagádn.* 1. Maiąc dany kąt na papiérze, znaléźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyká.

Sposób. 1. Przykładám śrzodek przenośnika do wiérzchołka kąta danégo, a podstawę tegoż przenośnika do iednégo z ramión kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokáże w stopniach wáżność iego.

Sposób 2. Od wiérzchołka kąta danégo, iak od śrzodka, promiéniém równym promiéniowi przenośnika, kréślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cyrklém na okrąg przenośnika, od końca śrzednicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcém śrzednicy i drugim punktém,

ktém, gdzie drugie ramié Cyrkla przypadnie, zawarty, pokáże w stopniach ważność kąta danégo.

273. *Zagádn.* 2. Na linii danéy, i przy punkcie na niéy danym, zrobić kąt zawiéraiący w sobie daną liczbę ſtopniów.

Sposób 1. Położywſzy na linii danéy przenośnik, tak, aby śrzednica iego, do téy linii przystawała, a śrzodek do punktu danégo, naznáczám na papiérze punkt, któremu odpowiádá punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną ſtopniów, tén punkt łączę liniią z punktem danym, a ta liniiá uczyni z daną kąt, którégo szukáłém.

To działanié będzie dokładnieysze, gdy przenośnik má sobie przydany promień ruchomy około śrzodka iego.

Sposób 2. Od punktu danégo, iak od śrzódka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kréślę łuk, i na tén, wziętą na przynośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięciá linii z tym łukiém, aż do drugiégo punktu na tymże łuku. Punkt tén ostatni złączywszy liniią z punktém danym na drugiéy linii, té obiedwie liniie zamykać będą kąt którégo szukáłém.

274. *Zagddn:* 3. W dané koło, wpisać

Wielo-

Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Szukám kąta w śrzodku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w śrzodku Wielokąta, maiący śrzodek koła danégo za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miáł za cięciwę bok Wielokąta danégo.

275. *Zagád.* 4. Na danéy linii wykréślić Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równé połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukám. Punkt przecięciá ramión tych dwóch kątów będzie śrzodkiém koła, w które wpisać się dá Wielokąt, o tylu bokach, ilé ich dano, i téy wielkości, iakiéy iest liniiá daná.

276. *Uwága.* Używanié przenośnika, wyciągá wielkiéy bácznośći. Jm większy promień mieć będzie, tym mniéy obáwiać się trzeba znacznieyszégo iakiégo uchybiéniá.

Między inszémi narzędziá tego niedostatkami, iest tén mianowicie, że promiéniá w nim odmiénić nié można według okoliczności; ale tén niedostatek zastąpić

ſtąpić może w potrzebie inszé narzędzié nazwané *linią ciéńciw* (liniiá chordarum) w cyrklu proporcyonalnym.

Táb.XVII. 277. Na obudwóch ramionach cyrkla proporcyonalnégo, znáyduie się *liniiá ciéńciw*, któréy podziały zaczynaią się we śrzodku (*in centro*) tego narzędziá: a kończą tam, gdzie iest liczba 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie ieſt liczba 60. Odległości śrzodka od inszych punktów podziału, pokazuią wielkość ciéńciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość ciénciw wyznaczoná iest w półkole, którégo promień równá się odległości śrzodka cyrkla proporcyonalnégo od punktu podziału naznaczonégo liczbą 60. a to z przyczyny równości ciéńciwy 60, ſtopniów z promiéniém.

Ponieważ rozwiązanié cztérech poprzedzaiących zagádnień iedynie zawisło od wyznaczeniá ciénciwy łuku, to iest od wielkości iéy względém promiénia; możná więc cztéry téZagádniéniá rozwiązać, używaiąc, iednégo tylko ramiénia w cyrklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: 0, i 60.

Dwa razém ramiona tego cyrkla ſłużą do odmiéniéniá; promiénia; náymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy cyrkiel proporcyonalny zupełnie

ieſt

ieſt zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cyrkiel coraz więcey otworzymy: a nayWiększym będzie, gdy cyrkiel wcale tak otworzymy, że ramiona iego w prostey będą linii.

Niechby na przykład tak był otworzony cyrkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie na przykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatem odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cięciwę ſtopniów 40, albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów 60 i 60; bo cięciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kół promienie. W ogólności więc mówiąc: gdy za promień weźmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cięciw, iakążkolwiek insza odległość dwóch punktów na teyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cięciwą łuku, o tylu ſtopniach, ile wyraża ta liczba.

Stąd wynika ſposób, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cięciw, i odmieniaiąc iak się podoba promień.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey także danym, zrobić kąt o pewney liczbie ſtopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otwórżmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od śrzodka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i daymy mu cieńciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną ſtopniów.

279. *Przykł:* 2. Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki bydź powinien we śrzodku Wielokąta żądanego, otwórżmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cienciw tą liczbą, iaka iest liczba ſtopniów kąta, we śrzodku Wielokąta, równała się linii daney; na teyże linii wyſtawmy Tróykąt równoramienny, dawszy mu za ramiona, linije równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Tróykąta, będzie śrzodkiem koła, w które wpisać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w ſzczególności: aby się obeyśdź można bez ſzukania kątów we

śrzod-

środku, znáyduie się na cyrklu proporcyonalnym osobná liniiá Wielokątów, za któréy pomocą, zacząwszy od Tróykąta, lub czworokąta, aż do dwunastokąta wykréślić można. Odległość środka, tego narzędziá, od punktu 6, téy linii Wielokątów, wziąwszy za promień, albo za bok Sześciokąta foremnégo w koło wpisanégo, odległości tegoż środka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta foremnégo, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ilé znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo też*: otworzywszy do woli cyrkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień odległość punktów 6, i 6; odległości inszych dwóch punktów: 3 i 3, 4 i 4, 5 i 5, i t.d. pokażą bok Wielokąta foremnégo o téyże samey liczbie boków wpisanégo w to koło, do którégo za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzeciá liniiá, którą na cyrklu proporcyonalnym znáyduiémy, a wielkiégo iest użytku, nazywá się *liniią części równych*. Na obudwóch cyrkla proporcyonalnégo ramionach, mámy liniią podzieloną na 200. części równych, a czasém, gdy cyrkiel mnieyszy, na 120, mniéy lub więcéy. Jakożkolwiek tén cyrkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów naznaczonych tą samą liczbą na przykład 200, będzie dwa razy

wię-

większá od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwóch punktów, 50, i t. d. a mówiąc ogólnie, odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch inszych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się maią do siebie też liczby.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią, podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby na przykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części rownych.

Otwórzmy tak cyrkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równá była linii daney: niech na przykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczba 200; weźmy piątą część tey liczby, toiest 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40; będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga.* Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybienie któreby zayśdź mogło w jey wielkości, byłoby 5 razy powtorzone, a zatem tak powtorzone, mogłoby się stać znacznym, chociaż każde z osobna było nieznaczne. Przytrafić się to może, osobliwie w ten czas, gdy na

wiele

wielé części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtárzaniá uniknąć, lepiéy będzie wziąźć osobno $\frac{4}{5}$ linii, toiest odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obudwóch końców na liniią daną: toż uczynić, wziąwszy potém $\frac{3}{5}$ linii i t. d.

284. *Używanie.* 2. Maiąc daną liniią znaleźć inną, któraby do niéy była w pewnym stósunku, w liczbach wyrażonym, na przykład iak 4. do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta naznaczone liczbą podzielną przez 7, na przykład na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ téy liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, któréy szukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w liczbach trzy boki Tróykąta, wykreślić go.

Przykład: Niechby trzy boki Tróykąta miały bydź iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otwórżmy iakokolwiek cyrkiel proporcyonalny: odległości dwóch Punktów: 150, dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dane; a zatém mogą bydź wzięte za te boki.

286. *Używanie* 4. Maiąc dany Tróykąt iuż wykréślony, którégo podſtawa zamyka na przykład 100, ſznurów, znaleźć wielkość inszych dwóch boków.

Przenieśmy podſtawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cyrklém długość dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczoné, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczám inszé używaniá, gdzie wykréślénié Geometryczné, krótsze iest częſto i pewnieyszé; iak na prz. w znaleźiéniu kwadratu równégo ſummie dwóch inſzych danych, albo więcéy.

287. *Uwága* 1. Gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, może na mieyscé iego, a czasém i lepiéy użyć linii podzielonéy na wielé części równych.

288. *Uwága* 2. Gdy część náymnieyszá, którey nám do podziału potrzeba, iest bardzo mała, a liczba części których szukámy znacznie wielká; w takim razie trudno iest mieć wſzystkié, na téyże saméy linii, podziáły, tak aby ié dobrze rozeznać można. Udámy się więc w podobnym razie do ſposobu następuiącégo:

Niech

Niechby podaná była liniiá, którá zbyt ieſt małá, aby ią widocznie na 10, części podzielić możná; trzeba osobno té części wynaléźć od 1, aż do 10. Táb. XV. *Fig.* 4.

Rozwiąz. Przez dwa końce téy linii prowádzę, po iednéy ſtronie dwie równoodległé. Na té równoodległé przenoszę od końców linii danéy dziesięć równych części; każdy Punkt podziału w jednéy równoodległéy, łączę liniią z punktém odpowiadaiącym mu na drugiéy równoodległéy. (Té liniie łączące będą równoodległé od linii danéy) Od końca iednégo linii danéy, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiégo linii ostatniéy równoodległéy; od danéy ta poprzeczná liniiá wyznaczy na równoodległych od linii danéy, części których ſzukáłém.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzieleniá na 100. równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła bydź widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tylé zaráz części równych wyznaczyć na niéy możná, ilé zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 100. Táb. XV. *Fig.* 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10. równych części; przez pierwszy punkt podziału, i przez drugi koniec téy linii, wyciągniymy dwie równoodległé iakiekolwiek, (zręczniéy iednak, i wygodniéy ieſt, aby mało co od prostopadłych uchy-

biały:) Przenieśmy znowu na té dwie równoodległé 10, części równych, albo mało różniących się od części linii danéy.

Złączmy drugi koniec linii danéy, od którégo nie była prowadzoná równoodległá, z oftatnim punktém podziáłu, równoodległéy bliższéy; złączmy także i punkta iednéy równoodległéy z punktami odpowiadaiącémi na drugiéy, i przeciągniymy ié aż do linii ostatniéy nie równoodległéy. Nakoniec przez wszyftkié punkta podziáłu linii danéy prowádzmy równoodległé od dwóch piérwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniózłszy podziáły linii danéy, na liniią iéy przeciwną i łączącą końce dwóch piérwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziáłu odpowiadaiącé. Po takiém wykréśléniu mieć zaráz możná tylé co chcémy, części równych na linii danéy, zacząwfzy od 1. aż do 100.

Trzeba na przykłád znaléźć nám części 64, takich, iakich linii daná má 100.

Stáwmy ramié iedné cyrkla zwyczaynégo na punkcie śrzednim, 4, i otwórżmy cyrkiel fzéroko, aż drugié ramié iego przypadnie na przecięcié dwóch liniy których końce naznaczoné są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cyrkla, dá nám liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Prze-

Przedłużaiąc liniią daną i wszystkié od niéy równoodległé, aż póki té przedłużéniá nie będą równé linii danéy wziętéy ráz, dwa razy, trzy razy - - dziesięć razy, otrzymámy taką liczbę części, iaką zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 200, 300, 400. - - 1000.

Taká *podziálka* (scala) iest do używaniá náywygodnieyszá, gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, dlá tego też i náywięcéy iéy używaią.

289. Jnny sposób do wynaleziéniá części równych linii danéy, tak małey, że iéy podzielić widocznie nié można na części żądané, iest tén, który się nazywá *podziálém Nonniusza*, a który raczéy nazywáćby się powinién podziáłém *Verniera*, z przyczyny, że tak zwáł się prawdziwy podziáłu tego wynalázca.

Niechby na przykłád przyszło podzielić na 30. równych części liniią tak małą, że widocznie na niéy części tych wyznaczyć nié można, niechby iednak była téy wielkości, że można ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy tę liniią na przykład na 6. części równych, i drugą iéy równą na 5. równych także części. Różnica szóstéy części pierwszégo podziáłu, od piątéy części drugiégo podziáłu, będzie równą różni- Táb. XV. *Fig.* 6.

cy

cy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całéy téy linii danéy, toiest, będzie $\frac{1}{30}$ téy linii. Gdy tedy té dwie liniie tak ułożymy, że iedna będzie przy drugiéy, i końce iednéy wpróst będą na przeciwko końców drugiéy; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obudwóch liniiach, będzie 30stą częścią danéy linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiégo podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżéy końców) będzie: $\frac{2}{30}$, odległość dwóch punktów trzeciégo podziału: $\frac{3}{30}$ czwártégo $\frac{4}{30}$, piątégo: $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$ częścią całéy linii danéy: toiest, iedną z tych części, na któré ta liniiá iest podzielona.

Tab. XVII. 290. Czwártá liniiá, która ieszcze zwykła się znáydowáć na cyrklach proporcyonalnych, i któréy wykréślénié zasádzá się na tém; co się wyżéy iuż wyłożyło, nazwaná iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum)

Odległości środka w cyrkłu proporcyonalnym od punktów podziału téy linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, któré w tym samym stósunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażoné. J tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, razy większy od drugiégo; bok tego drugiégo kwadratu większy byłby:

2.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, razy od pierwszego; dla tego też odległości od śrzodka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędziá nie pozwoliła daléy tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach śrzednich między témi, które się dopiero wyraziły, można ie wyznaczyć przez figurę dokładną lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwéy. J tak ieżeli odległość śrżodka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy na prz: 12 iakim częściom; odległość tegoż śrzodka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy blizko 17. takimże częściom; albo gdy pierwsza odległość znaczy nap: 100, drugá znaczyć będzie trochę więcéy iak 141, i t. d.

Używanie w tém, dwóch ramión cyrkla proporcyonalnégo, iest to samo, któré było i do inszych liniy.

Ponieważ na przykład odległości śrzodka od punktów:

	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 62, maią się
Do siebie,	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
iak liczby:	- - - więc też

i odległości dwóch punktów iednakową liczbą naznaczonych: 1.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
Przy iakim-
kolwiek o- - - - -
twiéraniu - - - -
cyrkla, mieć - - - -
się będą iak - - - -
liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Toż mówić i o innych liczbach pośrzednich.

Przystósowanie Niech będzie dany bok kwadratu iednégo; trzeba znaléźć bok innégo kwadratu, któryby był $\frac{5}{6}$ piérwszégó.

Otwiérám tak cyrkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cyrkla zwyczaynégo, z otwartością równą bokowi danému, przypadły na dwa punkta linii płaszczyzn iednakową liczbą naznaczoné, którąby podzieloná bydź mogła przez 6. na przykład na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$ téy liczby 60, toiest: 50, i nie odmiéniaiąc otwarciá cyrkla proporcyonalnégo, mierzę odległość dwóch punktów, 50: a ta będzie liniią któréy szukám za bok kwadratowi, maiącému bydź $\frac{5}{6}$, kwadratu danégo; a że figury podobné maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanié to przystósować równie można do wszystkich figur podobnych.

RO-

ROZDZIAŁ XI.

Piérwszé początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używaná bywá w praktyce, to szczególniéy gdy się wykréslaią na papiérze figury, choć w małości swoiéy, podobné tym, których są wyobrazeniém; i gdy wyznáczámy na karcie położénié punktów na polu na przykład znáyduiących się, których tam dlá różnych zawad wyznaczyć częstokroć nié možná.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowá, któréy bok zmierzony, má łokci 10.

Jakiéykolwiek, wielkości kwadrat odrysuiémy na papiérze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papiérze odrysowany, możná sobie wystawić wielkość tey izby trzeba położyć i oznaczyć *Podziałkę*, według któréy bok izby przenieśliśmy na papiér: bo inaczéy zapatruiąc się na tén ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaká iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze, iaká iéy wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątém, maiącym długość łokci na przykład 12, a szérokości łokci 8; odrysowawszy na papié-

rze

rze iakikolwiek prostokat, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wystawiłby nam iey figurę, ale nie wielkość: która dopiero w ten czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w iakiey mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się; czyli to przypisuiąc do boku odrysowanego że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaka iest długość na papierze wyrażaiącą łokci 10. i t. d.

Mierząc podobnie długość i szerokość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te, iedne względem drugich położenia i wielkość każdey z osobna części n p. budynku i t. d.

Można potem i drobnieysze części wyrazić, kładąc położenia drzwi, okien, i t. d. aby pod ieden razem widok poddadź budynek cały z jego częściami.

Kilkakrotnie takowe roboty czyniąc; nabędą w nich Uczniowie coraz większey łatwości.

292. *Przykład* 2. Niech będzie na polu Tróykat, którego boki wszystkie zmierzyć można; ieden z tych boków zawiera łokci: 180, drugi: 164, trzeci 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według

dług niéy zróbmy Tróykąt, którégo trzy boki zawiérałyby liczbę części równych z téy podziáłki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ tén mały Tróykąt má boki w tym samym stósunku, w którym są boki Tróykąta wielkiégo, na polu na przykład wymiérzoné; niczym więc od wielkiégo Tróykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością: a zatém będzie nám go mógł wyobrazić, i dá náwet poznać samę wielkość iego, gdy na papiérze wyrazimy podziáłkę, któréy do tego użyliśmy.

293. *Uwági.* W ostatnim przykładzie długości do mierzéniá, były przywiększé, a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiéy miary, na przykład łokcia, robota byłaby długá, i bardzo prácowitá; nadewszystko uchybiéniá małé, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych, miary, zebrané razém, uczyniłyby omyłkę tym znaczniéyszą, im częściey byłyby powtórzoné. Z tego powodu, wniosło się używanié sążni, prętów, a nawet i sznurów, na miéyscé łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniéyszéy, należy mieć sznur, a ieszcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyká. Dáymy na przykład, że łańcuch którégo używámy, má w sobie 10. sążni. Takowy łań-

cuch

cuch, do długości 180 łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzoná; będzie zatém wymiár i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiéy baczności potrzeba.

1. Należy bydź zapewnionym, że miary brané są w linii prostéy.

Tym końcém zostawuią się żérdzie, w pewnéy od siebie odległości, i w téy linii, którą mierzyć przypádá, tak, aby piérwszá żérdź zasłániała następuiące, a osobliwie drugi koniec linii do mierzéniá: trzeba także té żérdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzéniá nie znáyduie się iaki cél znaczny, na przykłád drzewo, rog dómu, i t.d. trzeba tam osobliwie, gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, na przykłád żérdź wysoką z chorągiewką, z táblicą białą na wiérzchu, lub z jnnym podobnym znakiém.

Trzeba ieszcze uważać, aby przykła-
da-

(z) Liniią prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, *poziomey* (horizontalis) nazywać będziemy *Pionową* (verticalis.)

daniá następné miary, były w linii prostéy; według drogi od żérdziów wyznaczonéy. Przeto tén, co trzymá piérwszy koniec łańcucha lub sznura, powinién się postawić wprost żérdziów, i dadź znak drugiému trzymaiącému drugi koniec, aby i tén wprost niego stanął w téyże saméy linii; albo znowu trzeciá osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzéniá, przestrzégać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostéy nie zchodzili.

Trzeba się starać, aby przy każdém przykładaniu miary, łańcuch lub sznur, iak náybardziéy był wyciągniony: dlá tego należy go do saméy ziémi przystáwiać, ieżeli ta równá iest wszędzie: albo też wspiérać go na podporach w pewnéy odległości zostawionych; a tym sposobém nachylénié, które ciężár łańcucha, lub sznura sprawuie, będzie mniéy znaczné.

J dlá tegoć to, w robotach wielkiéy wági, i osobliwéy dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani sznura używać nie można.

5. Trzeba ieszcze mieć báczność, aby do tego samégo mieysca, gdzie się miara iedna skończyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dlá tego należy dlá znaku wbić zaráz żerdkę lub

kół

kół w to mieysce, w którém się miara przeszła zakończyła, a następuiąca ma się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarze przykładał, i aby o tém dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć; lepiey iest za każdym razém naznaczyć sobie to przykładanie, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdego w szczególności wymiaru, znak iaki.

7. Bezpiecznićy także iest, powtórzyć zawsze wymiar całey długości.

8. Jeżeli pole do wymiérzenia wcale iest otwarte, i wolne; można ie podzielić na Tróykąty; czyli to prowadząc wszystkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za spólną podstawę tylu Tróykątów, ile będzie pozostałych rogów; czyli ieszcze wyznaczaiąc punkt w samém polu, i uważaiąc go iak wierzchołek, albo raczey zbieg tylu Tróykątów, ile figura, którą odrysować chcemy, ma boków. Zmierzywszy potém wszystkie boki wszystkich tych Tróykątów, można będzie odrysować na papierze figurę podobną.

294. *Przestroga*. Tén sposób postępowania, w odrysowaniu pola, mierząc w istocie wszystkie linije do tego potrze-

trzebne, i czasu wiele zabiera, i rządko nawet trafia się, aby pole tak było wolne, żeby na niem sposobu tego użyć można.

Jnszych zatém użyć trzeba w tym razie sposobów, które się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych. Postrzédz tu łatwo będzie można, iż używanie sposobów trudnieyszych i bardziey zawikłanych, nie zawisło od prawideł Geometrycznych, których grunt tenże sam iest zawsze i iednakowa dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i ręcznych działań.

295. *Zagadn:* Znaleźć iakiego celu odległość nie mierząc iey *bezśrzednie* (immediate,) czyli nie udaiąc się wprost, aż do samego celu.

Sposób. 1. W którym samych się tylko żerdzi lub kołów używa.

1. Wymierzmy podstawę iaką, któraby się z jedney strony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podstawa (dla większey w praktyce dokładności) powinna bydź tym dłuższa, im odległość celu, okiem miarkowana, zdaie się bydź znacznieysza. Dla teyże w praktyce dokładności, trzeba ieszcze takie położenie

wy-

wybrać téy podstawie, aby prostopadłá, którąby do niéy od célu spuścić możná, iak náybliżéy iéy śrzodka przypadła; ponieważ ze wszystkich inszych téyże długości podstáw, podstawa z takiém położeniém iest náywygodnieyszá.

2. Wytkniymy kołami ustawionémi od obudwóch podstawy końców, dwie liniie, ku célowi, którégo szukámy, prowadzącé.

3. Zmiérzmy od iednégo końca podstawy, dwie iakiékolwiek długości, iednę na podstawie, a drugą na linii kołami, wyznaczonéy; zmierzmy nad to, i odległość końców, tych dwóch długości iuż wymierzonych. Zróbmy to samo i z drugiego końca podstawy.

Maiąc té na ziémi wymiary, możémy na papiérze odrysować Tróykąt podobny tému, który má za podstawę liniią na ziémi wymierzoną, a za wiérzchołek, punkt ten, którégo odległości szukámy.

Jakoż wyraziwszy na papiérze podstawę przez liniią iakąkolwiek, możná będzie przy obudwóch końcach téy linii odrysować dwa Tróykąty, których boki takby się miały do siebie, iak się maią długości na ziémi wymierzoné (pod liczbą 3:) a zatém i liniie które się ciągnęły od końców podstawy na ziémi,

do

do punktu, którego odległości szukamy, będą tak do tey podstawy nachylone, iak i linije dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącey podstawę prowadzone, nachylaią się do teyże podstawy.

296. *Przestroga*. Ten sposób wielkiey bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoszeniu ich na papier. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna: gdy na przykład wyobrażenie tylko chcemy sobie uczynić nie znaiomey odległości iakiego celu; wyznaczenie według tego sposobu położenia punktu iakiego nie dostępnego, od tego zawisło, aby doyśdź nachylenia iedney linii wiadomey, toiest podstawy, do dwóch inszych prowadzonych od obudwóch końców teyże podstawy, ku punktowi, którego położenia szukamy: ponieważ gatunek Tróykąta, temi trzema liniiami zawartego, a zatem i stósunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez te nachylenia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) są to dwa narzędzia szczególniey używane do wyznaczenia bezśrzednie takowych nachyleń.

Sposób 2. Przez stolik Geometryczny.

297. Nie bawiąc się nad opisaniém tego narzędziá, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenié oka, dopiéroż używanié, więcéy w téy mierze nauczy, niż opis choćby też náyobszérnieyszy), przestrzédz tylko należy, że lepiéy iest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to, perspektywy opatrzoné nitkami, w kąt prosty przecinaiącémi się, niżeli prosté *Célowniki* (dioptrae) i że ténże stolik ustawić należy *poziémnie* (horisontaliter) iak będzie można náyrówniéy: do czego *prawidła* (Alidae) *albo* Regulae (a) z ruchomémi perspektywami, daleko są łepszé, niżeli té, przy których perspektywy lub Célowniki są nie ruchomé. (b)

Aby wyznaczyć przez stolik odległość tę, w którey od iakiego punktu nie dostępnego zostaiémy; powinná do tego wymierzoná bydź podstawa na ziémi; z ostrożnościami wyżéy wzmiankowanémi, co do iéy położéniá i wielkości: trzeba

(a) Prawidło, iedno iest to, co i liniiáł; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączy się razém i spáiá z célownikami lub perspektywami, dlá tego się odmiénnégo nazwiska użyło.

(b) Célowniki im są wyższé, tym lepszé, bo bez nachyleniá, lub podniesiéniá stolika, można przez nie widzieć cél iaki na dole, lub w górze wystawiony.

trzeba potém postawić stolik na końcu iednym téy podstawy, i wyrazić tam iéy długość, i położenie, a to przez liniią kierowaną, przez prawidło wzdłuż téyże podstawy ustawione. Nachylenie podstawy do linii poprowadzonéy od iéy końca ku punktowi niedostępnému, wyrazimy na stoliku, przez liniią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku témuż punktowi zkierowanym. To zrobiwszy, przeniesiémy stolik na drugi koniec podstawy, na ziémi wymierzonéy, i podobnie sobie, iak przy piérwszym końcu podstawy postąpimy, ciągnąc znowu przy prawidle liniią od końca drugiégo podstawy na stoliku wyrażonéy ku punktowi, którégo odległości szukámy. Tróykąt wykréślony tym sposobém na stoliku, podobny będzie Tróykątowi na ziémi zamkniętému między podstawą wymierzoną, i dwóma bokami, któréby od iéy końców prowadzone schodziły się w punkcie zostaiącym w odległości niedostępnéy; a zatém wielkości liniy na stoliku wykréślonych, i podług podziáłki wymierzonych, dadzą nám poznać i wielkości liniy odpowiadaiących na ziémi. I tak niechby na przykład długość podstawy na ziémi, była: 200 sążni, którą wyráżá na stoliku liniiá zamykaiącá w sobie 200 równych części wziętych z jakiéykolwiek podziáłki. Jeżeli drugá liniiá na tymże stoliku poprowadzoná od końca piér-

wszéy wyrażaiącéy podstawę, má w sobie podług téy saméy podziałki, na przykład, 180 części: to będzie dowodém, że i liniiá odpowiadaiącá iéy na ziémi, zawiérá 180 sążni.

298. Używanié stolika nie rozciągá się, tylko do długości pomiernych. Náywiększá taká długość, do któréy ieszcze stolika użyćby można, nie powinná przechodzić 300, a náywięcéy 400, sążni. Szczupłość narzędziá tego, a zatém i linii przez które musimy na niém wyrážać liniie uważané na ziémi, czyni uchybiéniá tym znacznieyszé, im większé są té ostatnié długości. Możémy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażénié, na papiérze gruntu iakiégo nie bardzo rozległégo i prawie forémnégo: albo gdy tylko wewnętrzné mieysca gruntu, chociáż obszérnégo wyznaczyć potrzeba, którégo położénié punktów znamienitszych, iuż wyznaczoné iest sposobém dokładnieyszym; który zaráz wyłożę.

299. Sposób 3. przez Kątomiérz (c).

Wy-

(c) Nauczyciele nié maiąc Kątomiérza, ukážą Uczniom przenośnik który małością tylko różni się od Kątomiérza, i tém, że nié má przydanych sobie prawideł z Célownikami.

Wystawiénié przed oczy tego narzędziá, a potym używanie, dá go náylepiéy poznać. Tę tylko, co i względém stolika uwágę przydadź należy, że kątomiérze z ruchomémi prawidłami, na płaszczyznie pionowéy ustawioné, i perspektywami opatrzoné, lepszé są od tych, które maią prawidła nie ruchomé, zwłaszcza że wiele na tém zawisło, aby kątomiérz był zawsze po ziémnie ustawiony: a długié i trudné iest działanié, chcieć przywieśdź do iednéy płaszczyzny kąty na różnych płaszczyznach uważané.

Kątomiérz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniiami na stoliku oznaczoné były. Ponieważ zaś narzędzié to bywá małé, tak dlá większéy wygody, iak i tanności; przeto nié można oznaczyć na iego brzegu podziałów mnieyszych od stopnia: przydaią mu zwyczaynie na to mieyscé podział inszy, któryśmy wyżéy nazwali *podziałém Nonniiusza*, aby tym sposobém i minut dochodzić można, przynáymniéy do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędziá: co dosyć iest w zwyczaynych na ziémi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomégo (który łuk powinien iak náybardziéy przystáwać do brzegu Kątomiérza) i zawiéraiący w sobie na przy-

przykład 11. stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, mniey $\frac{1}{12}$, stopnia, toiest mniey 5, minutami; a zatém, gdy dwa podziały, iedén prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sąbą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony $\frac{0}{}$, w podziele prawidła, toiest, punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis) prawidła, albo perspektywy, schodzi się z podziałém brzegu Kątomierza; liczba stopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznaczá w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy tén punkt nie schodzi się z podziałém brzegu, kąt którégo szukámy, różnić się będzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swoiéy, od liczby stopniów wyrażonéy przy podziele náybliższym, podług tego, iaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałém brzegu.

Aby przez Kątomiérz wyznaczyć odległość punktu niedostępnégo.

Trzeba naprzód, aby była wymierzoná podstawa, położywszy potém Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nieruchomé przypadło na tęż podstawę, céluię drugiém prawidłém

ru-

ruchomym, do punktu, którego położénié chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadomé przy podstawie.

Pociągnę daléy na papiérze, iakakolwiek liniią, którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niéy dwa kąty z obustron równé kątóm uważanym na ziémi. Punkt ten w którym dwa tych kątów ramiona przecinać się będą, pokaże na papiérze położénié punktu, którégo szukám, i iego odległość od iednégo z końców linii wyrażaiącéy podstawę tak się mieć będzie do téyże linii, iak się má punktu niedostępnego na ziémi odległość, od końca podstawy tamtému odpowiadaiącégo, do saméy podstawy. Piérwszy stósunek z podziałki wyznaczony będzie, a zatém wynáydzie się odległość żądaná przez proporcyą: któréy trzy piérwszé wyrazy będą wiadomé, toiest, iak się má liniiá wyrażaiącá podstawę na papiérze, do podstawy na ziemi; tak się má liniiá na papiérze odpowiadaiącá odległości, któréy szukámy, do téyże odległości.

Gdyby dwa takié punkta były niedostępné, których odległości nie wiémy; możnáby każdégo z nich w szczególności wyznaczyć położénié względém linii wymierzonéy, i wziętéy za podstawę: tak się albowiém mieć będzie liniiá na papié-

rze

rze wyrażaiącą podstawę do linii wyrażaiącey także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępnych, (który to stósunek wiadomy iest z podziałki); iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów niedostępnych.

Jakażkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi którychbyśmy położenie wyznaczyć chcieli, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżey sposobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z którey dwóch końców wszystkie te punkta widziane bydź mogą: i według tego wyznaczyć potém na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadaiące tamtym punktóm.

Można więc będzie tym sposobem odrysować mappę i obszernieyszey sztuki ziemi, którey punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch iakich inszych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były nie dostępne, można w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe *punkta stanowiska* (puncta stationis) toiest takie, z których położenie inszych punktów, mogłoby bydź

wy-

wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z jednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie już wyznaczone iest przez rysunek. Można podobnym sposobem działanie to rozciągnąć, i do odrysowania mieysc obszernieyszych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i iasne; atoli w wykonaniu ich, wielkiey baczności przykładać należy: bo inaczey, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, są znacznieysze, i działania w nich bardziey zawisłe iedne od drugich. Nie będziemy się tu bawić nad podawaniem drobnieyszych w tey mierze uwag, i służących tym tylko uczniom szczególniey, których powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań, Znaydą ci bardzo dobre do tego się ściągaiące nauki, w różnych Xiążkach, między inszemi w trzeciey Xiędze pod tytułem *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydaney.

300. Tego się szczególniey w podobnych rozmiarach strzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostre, iako i te,

któ-

które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położénia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącémi od punktów dwóch ſtacyy do tamtych punktów. Dlatego podſtawa powinna bydź tym większa; im większa odległość, któréy ſzukamy, i położénie punktów takie, aby prostopadłe od nich spuszczone, ile możności, przypadały na podſtawę nie przedłużoną, albo przynáymniéy mało co przeciągnioną. Małe uchybiénie w kącie, przy podſtawie, pociąga za sobą tym większe uchybiénie w bokach; im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatém, gdy kąty przy podſtawie są bardzo oſtre, albo też, gdy ich summa nie wiele się różni od ſummy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmiénić iedno, lub obadwa ſtanowiska. A ieżeliby między punktami, których położénie i odległość iuż ieſt wyznaczona, nie znaydowały się dwa insze takie, aby liniia łącząca ie zdatna była do wyznaczénia inszych punktów pozoſtałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie ſłużyć za ſtanowiſko, z oſtrożnościami wyżéy spomnionémi; choćby nam z siebie nie był potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczególniéy założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawiſły od drugich; należy przynáymniéy bydź za-

pe-

pewnionym, że w ten związek działań nie wplątały się błędy, z których rozmnożenia urosłoby znacznieysze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samey wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie różni od tey, która wyznaczona była przez proporcyą którey dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podstawę i szukać z niey położenia końca iednego z dwóch, pierwszey podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta była nam ieszczę niewiadoma; a gdy się pokaże, że z tego powtórnego działania wypadnie to położenie punktu, co z pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynaymniey znacznieyszego: ponieważ z dwoiakiego takiego działania, iednakowe położenie wypaśdźby inaczey nie mogło, chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziey nagrodził drugi: co się rzadko trafia.

Jakążkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszenie atoli

li na papier tych działań, będzie podlegać wielkim niepewnościóm.

Trudność ta ostatniá stąd szczególniey wynika; że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cyrklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobná wyznaczyć liczbę minut, które się pospolicie w kącie danym znáyduią. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inszy większy w liniiach, których długość różnić się stąd będzie od prawdziwey, 3ostą, 2ostą, a czasem i 1otą częścią tychże samych liniy; a ten błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach liniy sprawi; im mnieyszá względem nich była ta liniiá, którą wzięliśmy za promień. Źrzódło to omyłek maiey wpływac będzie w takowe uchybieniá, gdy iuż nám skądinąd wiadome są długości boków należących do Figur, które rysować mámy: a te długości są pospolicie zamiarem szczególnieyszym działań mierniczych. Gdyby na przykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całey linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość; omyłka ta, która stąd wyniknie, względem położeniá na papierze liniy, figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieyszá; im dłuższe były liniie, któreśmy przenosili. Szu-

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Tróykątach, których boki byłyby nám wiadome, toiest, żeby można odrysować na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Tróykąta, szukano sposobów, i znaleziono ie, iakby stąd doyśdź ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziemiomierstwa, która na to przepisy daie, nazywa się *Trygonometryą*, albo *Tróykątmierstwem*: a to dla tego, że szczególniey rzecz tam iest o Tróykątach, iako tych, od których wyrachowania wszystkich inszych wielokątów wyrachowanie zawisło. Jest to część náyznakomitsza Matematyki, nazwaney (*Mathesis pura*): przystósować ią bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Mieszaną*, idąc za łacińskiem nazwiskiem (*Mathesis mixta*:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach: do Optyki, albo nauki o widzeniu, a náywięcey do Astronomii, czyli nauki Gwiazdarskiey: i dla tego ta część szczególnieyszey uwagi i zastanowienia się Uczniów wyciąga.

Przy-

Przygotowanie do Rozdziału następuiącego o Logarytmach.

Poniewáż o Logarytmach dokładniey mówić się potém będzie; tu tylé tylko o nich powiémy, ilé potrzeba umieć, aby ié przystósowáć możná do rozwiązaniá reguły trzech, i wyciągnićniá pierwiástku kwadratowégo.

301. Logarytmy, są to liczby odpowiadaiącé liczbóm cáłkowitym, i następnym, 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w tén sposób, że té piérwszé liczby, czyli Logarytmy, iedné do drugich dodané, odpowiadaią tym ostatnim, gdy są iedné przez drugié rozmnożoné.

J tak znáyduiémy w táblicach logarytmowych przy liczbach - -

- -	2,	i 3.
Logarytmy:	0, 301 030 0.	
	0, 477 121 3.	

Jch summa 0, 778 151 3 iest logarytmem liczby 6, która się robi z rozmnożéniá 2, przez 3.

W zwy-

W zwyczaynych táblicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- -	1
		są
100	- -	2
1000	- -	3
10000	- -	4.
i t. d.		i t. d.

Logarytmy liczb mnieyszych od 10, ale większych od 1, są ułomki dziesiątné nie maiącé żádnéy liczby całkowitéy.

J tak Logarytmy liczb:

2,	-	0, 301 030 0.
	są	
3,		0, 477 121 3.
4,	-	0, 602 060 0.
5,	-	0, 698 970 0.
i t. d:		i t. d.

302. Ponieważ zaś rozmnożénié iakiéy liczby przez 1, żádnéy odmiany w niéy nie ſprawiá; przeto i dodanié logarytmu iedności, do logarytmu téy liczby, odmiénić tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc iedności ieſt zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są iedności z przydanémi ułomkami dziesiątnémi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby cał-

ko-

kowité piérwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanemi ułomkami dziesiątnémi

Znak piérwszy logarytmu liczby cáłkowitéy ieſt częścią náyznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z jak wielu znaków ſkłádá się liczba cáłkowitá, któréy ieſt logarytmém. Tak na przykład, znak logarytmu piérwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któréy odpowiádá, zawiérá się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t. d. to iest má w sobie ieden, dwa, trzy, czté́ry, pięć, i t. d. znaków liczb cáłkowitych. Dlá tego też piérwszy znak Logarytmu nazywá się iego *Céchą* (Charaćteristica.)

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowé ułomki dziesiątné, (d) a cécha ich tylko ieſt odmiénná; w takim razie liczby im odpowiadaiącé, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większé iedna od drugiéy, podług tego, iak cécha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiéy, dwiéma, trzéma i t. d. iednościami, J tak logarytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 301 030 0. 2, 301 030 0. 3, 301 030 0. i t. d. toiest, będzie tén sám co i Logarytm liczby

---

(d) Té ułomki w Logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie; *Mantyſsa*.

liczby 2, przydáwszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od náywiększéy liczby táblic logarytmowych.

304. *Przykłád* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	-	1, 447 158 0,
		iest	
Log:	32	-	1, 505 150 0,
Summa Log.	-	-	2, 952 308 0.

J ta Summa powinná bydź logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w táblicach logarytmowych przy logarytmie, 295 230 80, znáydziemy liczbę 896; która to liczba wypádá w saméy rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykłád 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1, 204 120 0.
Log:	24,	-	1, 380 211 2.
Log:	26.	-	1, 414 973 3.
Summa Log:		-	3, 999 304 5.

S J toiest

J toiest logarytm liczby 998 4, która wypádá z rozmożéniá trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiéy liczby, ieſt ta sama liczba przez siebie rozmnożoná; więc logarytm tego kwadratu, będzie równy logarytmowi liczby z któréy kwadrat powſtał, dwa razy wziętému.

Przykład 1. Log: 2, - 0. 301 030 0.

Ténże dwa razy wzięty 0, 602 060 0, będzie logarytmém kwadratu z 2, to ieſt 4.

Przykład. 2, Log. 56 - 1. 748 188 0.
Dwa razy wzięty: - - 3, 496 376 0.
będzie Logarytmém kwadratu z 56, toiest: - - 3, 136.

306. W dzieléniu, liczba podzielná równá się liczbie dzielącéy, przez wieloráz rozmnożonéy; a zatém logarytm liczby podzielnéy, równá się logarytmowi liczby dzielącéy dodanému do logarytmu wielorazu; a stąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielonéy i dzielącéy.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,
Log: 6. - 0, 778 151 3.
Log: 2. - 0, 301 030 0.

Różnica - 0, 477 121 3, iest logarytmém wielorazu, toieſt 3. *Przy-*

Przykład 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log:	1632	- -	3,212 720 2
Log:	34	- -	1,531 478 9
Różnica		- -	1,681 241 3.

ieſt logarytmém wielorazu toiest. 48.

307. W proporcyi: śrzednie liczby, iedna przez drugą rozmnożoné, równé są skraynym podobnie rozmnożonym, iako się to w Arytmetyce i w Rozdziele o proporcyach wywiodło. Przeto iednę z skraynych liczbę znáyduiémy, dzieląc śrzednié liczby w tén, iak wyżéy, sposób rozmnożoné, przez drugą liczbę skrayną: a zatém i logarytm liczby iednéy skraynéy wynáydziémy, odiąwszy od summy logarytmów dwóch liczb śrzednich, logarytm drugiéy liczby skraynéy.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45, sążni pewnéy roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42, robotników z równą usilnością prácuiących?

Log:	42	- -	1.623 249 3.
Log:	45	- -	1.653 212 5.
Summa		- -	3.276 461 8.
Log:	35	- -	1.544 068 0.

Różnica - 1.732 393 8. iest logarytmém żądanym, liczby 54.

308. Zamiást odeymowaniá, któréby należało czynić w logarytmach, używá się wygodnie dodáwania w tén sposób: Logarytm liczby dzielącéy, a bardziéy iego cécha, odeymuie się od liczby cáłkowitéy 10, i reszta dodaie się do logarytmu liczby podzielnéy, a od summy, znowu się 10 odciná.

Defin: Różnica logarytmu liczby iakiéy od 10. nazywá się *dopełniéniém* (complementum) tego logarytmu.

Przykłád. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - - 0.778 151 3.
Log: 2. 030 103 00. Dopełniénié tego log: 9.698 970 0

Summa - 10,477 121 3
Log: wielorazu - 0. 477 121 3.
iest Log: 3.

Podzielić 1632 przez 34.
Log: 1632 3.212 720 2.

Log: 34, 1.531 478 9. Dopełn:
Log: 34, 8.468 521 1.

Summa - - 11.681 241 3.
Log: wielora: 1.681 241 3.
iest Log: 48. Tén

Tén sposób postępowaniá osobliwiey iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanie następuiące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaszcza rachunkach, omyłki iakiey dadź okazyą. Można zaś i nie wielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanie, które potrzebne iest do otrzymaniá dopełnieniá logarytmu, które się potém dodaie na mieysce logarytmu odeymować się maiącego.

Przykład 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 rob:?

Log:	42	1.623 249 3.
Log:	45	1.653 212 5.
Dopełnienie Logar:	35	8.455 932 0.
Summa którey cécha zmnieyszoná liczbą 10.		1.732 393 8.

Przykład 2. Bok iedén prostokąta má 1344, a drugi 1445 łokci. Trzeba go zamienić na inszy prostokąt iému równy, którego bok iedén ma zawierać 1440. łokci?

Log:	1344	-	3.128 399 3
Log:	1445	-	3.162 863 0
Summa		-	6.291 262 3.
Log:	1440	-	3.158 362 5.
Różnica		-	3.132 899 8. ieſt

Logary-

Logarytmém liczby, któréy szukaliśmy toiest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy iest większy, niż Logarytm piérwiástku; przeto Logarytm piérwiástku; iest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby piérwiástek kwadratowy; trzeba wziąść połowę logarytmu téy liczby.

Przykład 1. Wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 4.

Log: 4 - 0.602 060 0.

Połowa - 0.301 030 0. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 2.

Przykład 2. Wyciągnąć piérwiáſtek kwadratowy z 7569.

Log: 7569. - 3.879 038 5.

Połowa - 1.939 519 2. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 87.

Przykład. 3. Boki proſtokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iému równégo w powiérzchni?

Log:	378	-	2. 577 491 8.
Log:	672	-	2. 827 369 3.
Summa		-	5. 404 861 1.

Poło-

Połowa - 2. 702 4305. iest logarytmem liczby szukaney toiest 504.

310. *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiętnich.*

Niech będzie liczba n p. 1764, którey logarytm: 3. 246 498 6. Podzieliwszy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniey w cesze swoiey (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 246 498 6.
Podobnie log: 17, 64, będzie 1. 246 498 6.
Log: 1, 764 - 0, 246 498 6.

Dzieląc 176 4, przez 1000, logarytm wielorazu, toiest liczby 1, 764, ma cechę mnieyszą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 176 4, nie podzieloney. Gdyby tedy przyszło, 176 4 dzielić przez 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. Logarytmy wielorazów, toiest ułomków dziesiątnych: 0, 176 4. 0, 0 176 4, 0,001 764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d. iednościami mnieyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 176 4, nie podzieloney. Że zaś cecha logarytmu liczby 176 4, iest: 3, a cechy logarytmów liczb: 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. toiest liczby większe od 3, od których ie odeymować przypada; więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa się, iakoby cecha 3, powiększona była 10 iednościami, i dopiero od tak powiększoney

odey-

odeymuią się cechy liczb dzielących: 1 000 0, 100 000, 1 000 000. i t. d. toieſt cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze na to przydanie i zmnieyszaiąc znowu resztę, toi st, logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; będzie więc log $\frac{1\ 764}{1\ 000}$, albo 0, 1 764 = 13, 246 498 6—4 (e) = 9, 246 498 6, toieſt dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w samey rzeczy = 9, 256 498 6 — 10: Tak też Log: 0, 017 64, będzie=8,246 498. 6—10. log. 0, 001 764. będzie = 7, 246 498 6 — 10. i t. d.

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,380 211 2.

Log: 0,5 = 9,698 970 0. — 10.

Summa = 1,079 181 2. = Log: 12, toiest liczby wypadaiącey z rozmnożenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,380 211 2.

Log: 0,05 = 8,698 970 0. — 10.

Summa = 0,079 181 2. iest logarytmem liczby rozmnożoney.

Ten

(e) Znak — kładzie się przed tą ilością n p. przed tą liczbą, która ma bydź od drugiey odięta.

Tén logarytm nie znáyduie się w táblicach logarytmowych z cechą, o, ale się znáyduie z cechą 1, i odpowiádá mu liczba: 12; a zatém liczba, któréy szukaliśmy, będzie 10 razy, mnieyszá toiest: 1, 2.

Przykłád: 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,505 1500.

Log: 0,5 = 9,698 9700. — 10.

Reszta. 1.806 1800 iest logarytmém wielorazu, toiest liczby 64.

Odeymuiąc 9.698 9700, od 1,505 1500, odéymowalibyśmy 10 razy więcéy, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydadź należało. Na iedno zaś wyydzie, gdy té 10, którémi iest powiększoná liczba maiącá się odeymować, przydámy też i do liczby, od któréy ią odeymować przypádá, toiest, gdy odeymuiémy 9,698 9700 od 11,505 1500.

Przykłád 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,158 3625.

Log: 0,06, = 8,778 1513. — 10.

Różnica - - 3,380 2112. iest logarytmém wielorazu, toiest liczby: 2400.

Co

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatém logarytm ułomka równy różnicy między logarytmém licznika iego i mianownika.

Niech będzie na przykład ułomek niewłáściwy $\frac{7}{5}$.

Log: 7. - 0,845 098 0.

Log: 5 - 0,698 970 0.

Różnica - 0,146 128 0 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tém przekonać używszy ułomka dziesiątnego zamiáſt ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiém $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.146 128 0.

A zatém Log: 1,4 - 0.146 128 0.

312. Gdyby ułomek był właściwy, to ieſt gdyby licznik iego był mnieyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyszy od logarytmu mianownika. Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika;

ka; pożyczámy 10. tému logarytmowi iak wyżéy (310) w podobnym przypádku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2=0,301 0300.

Log: 5=0,698 9700.

Log: $\frac{2}{5}$=9,602 0600. — 10.

Przykład 2. Trzeba znaléźć Log: $\frac{7}{15}$

Log: 7=0,845 0980.

Log: 15.=1,176 0913.

Log: $\frac{7}{15}$.=9,669 0067. — 10.

Przykład: Trzeba znaléźć log: $\frac{1}{25}$

Log: 1.=0,000 0000.

Log: 25=1,397 9400.

Log: $\frac{1}{25}$=8,602 0600. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennégo iakiégo znaku céchy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącégo ułomkowi, aby ią zaráz na weyzrzénié rozeznać można od céchy logarytmu, który liczbie całkowitéy odpowiádá.

313.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znáyduie się w Táblicach, można wtedy liczbę, którey odpowiádá, wyznaczyć; albo z zupełną dokładnością albo z małem uchybieniem.

Przykład: 1. Jakiż ieſt wieloráz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5	- -	0.698 070 0.
Log: 4	- -	0.602 060 0.
Różnica	- -	0.096 910 0.

Logarytm ostatni, oznáczaiący różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znáyduie się w Táblicach ani z cechą 0, ani z cechą 1; ale się znáyduie z cechą 2; liczba onému odpowiadaiącá iest: 125; ale że tén logarytm má cechę 2; więc nasz będzie odpowiadáł liczbie 100 razy mnieyszéy, toiest: 1,25.

Przykład 2. Trzeba znaléźć kwadrat z 299, maiąc tylko Táblice Log: nie daléy rozciągaiącé się, iak do 10000, toiest takié, których náywiększy Log: iest: 4 000 000 0.

Log: 299	- -	2.475 671 2.
Ténże podwoiony	-	4.951 342 4.

Drugiégo tego logarytmu w táblicach zwy-

zwyczaynych nie znáyduiémy. Zmnieyszmy więc iednością céchę iego: tén Logarytm zmnieyszony 3.951 342 4, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znáyduie się w táblicach; znáyduiémy go iednak co do piérwszych, i mało co większy iest od Log: 3.951 337 5. a mnieyszy od 3.951 386 1.

Piérwszy z tych logarytmów znáyduiących się zupełnie w Tablicach: iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby - - - - 8941.

A zatém liczba, któréy szukámy, będzie między 8 940 0 - - - - - 8 941 0.

Logarytm dany przewyższá logarytm piérwszy Táblicowy liczbą 49; mnieyszy zaś iest od drugiégo logarytmu Táblicowégo liczbą 437. Ta tedy któréy szukámy liczba, powinná daleko więcéy zbliżać się do 8 940 0, niż do 8 941 0.

Widzimy z Táblic, że kilka logarytmów, które następuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i té logarytmy różnicę, toiest 486, tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących iest taż sama, toiest 1: a zatém ieżeli różnica między logarytmém danym i logarytmém Tablic iému náybliższym, iest na przykład połową, lub trzecią częścią, lub czwártą, i t. d. różnicy między tymże

że náybliższym logarytmém, i drugim, zaráz po nim następuiącym, to też i różnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danému, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi náybliższému, będzie prawie połową trzecią częścią, czwártą i t. d. iedności, która iest różnicą między dwiéma liczbami naturalnémi, po sobie idącémi. Że tedy różnica 49, iest prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486; więc i różnica liczby szukaney dlá dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią iedności, toiest 0, 1; a zatém liczba odpowiadaiącá logarytmowi 3.951 342 4, będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadaiącá Log: 4.951 342 4, będzie, 8 940 1, toiest kwadrat, którego szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończénie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iéy má się kończyć na 1, možná było bez tak długiego rozumowániá doyśdź téyże liczby kwadratowéy: 8 940 1.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieyszá, im są większé liczby, którym oné odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9. iest: 4 575 75.

Ró-

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, iest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłádá się na dziesięć inszych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, iest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłádá się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901, i 902, 902, i 903, 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000, i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10; ale się rozkłada na 1000. inszych różnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanié logarytmów iest bardzo przydatné w wyciąganiu piérwiástków z Jlości nie spółmiernych.

Przykłád 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony piérwiástek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.301 030 0.
Połowa tego Log: - - 0.150 515 0.

Szukáymy téy połowy z céchą 3. Logarytm náybliższy w tablicach będzie: 3.150.

3.150 449 4, który odpowiada liczbie: 1414. A że ten logarytm iest mnieyszy od 3,150 515 0; więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danému będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994 476; i 2,002 305.

Aby pierwiastek bardziey ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656, między logarytmém danym, i náybliższym z tablic: i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logarytmami, danému náybliższémi. Ułomek $\frac{656}{3070}$ na dziesiątné części obrócony, będzie miał pierwszé dwa znaki liczebné: 21; a zatém pierwiastek bardziey przybliżony będzie: 1,414 21. Możnáby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydadź w tym pierwiastku; kończąc daléy dzielénie, a tém więcéy pierwiastek ten byłby do prawdziwégo przybliżony.

Przykład 2. Trzeba znaléźć liczbę przybliżoną do następuiącégo wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Log: 5. - 0.698 970 0; $\frac{1}{2}$ Log: 5. - 0.349 485 0.

Log: 2. - 0.301 030 0; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.150 515 0.

Różnica - - - 0.198 970 0.

Osta-

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiáda prawie w tablicach z cechą przydaną 3, liczbie 1,581, a zatem $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIÁŁ XII.

O Trygonometryi.

316. Wystáwmy sobie Tróykąt w koło wpisany. Boki tego Tróykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątóm. A że miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Tróykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama iest, co i kątow im przeciwnych.

Jdzie zatém, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Táblicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy na przykład od łuku iedney minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cienciwa iest naywiększá) iuż tém samem i stósunek boków Tróykąta znaleźlibyśmy z danych kątów iego: i wzaiemnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Tróykąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwóynasób kątów Tróykąta, szukam

zamiást cięnciw inszych liniy, do których boki Tróykąta byłyby proporcyonalne, i takich, któreby się właściwie sciągały do kątów tegoż Tróykąta. Kąt we srzodku koła opisanego na Tróykącie, zamykaiący ramionami swémi tén łuk, którego cięnciwą iest bok ieden tegoż Tróykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw ſtoi tegoż boku Tróykąta; a zatém gdybyśmy tén kąt we śrzodku przecięli liniią na dwie równé części iedna takowá część byłaby równa tamtému kątowi Tróykąta. Bok ténże Tróykąta byłby proſtopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równé części; a ta liniiá przecięłaby go na dwie także równé części. Toż samo przyſtósować można i do inszych dwóch boków tego Tróykąta. W tén sposób wyſtawiono sobie boki Tróykąta, względem kątów im przeciwnych.

318. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, ſpuścimy proſtopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegóż łuku; ta proſtopadłá má nazwisko *Sinus* (f) a po Polſku nazwać ią można *Wſtawą* tego

---

(f) Wyráz tén *Sinus* stąd podobno má swóy początek; Połacinie *Cięciwa* nazywá się *Inscripta*; a połowa cięnciwy, *ſemiſsis Inscriptae*, dlá skrócénia pisano może dá-

tego łuku, że się wſtawiá między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniém przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Niech będzie AB łuk koła; proſtopadłą BD, ſpuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziémy *wſtawą* tego łuku. Tab. XVIII. *Fig.* 2.

319. *Wniosek* 1. Wſtawa łuku równá się połowie cienciwy łuku inszégo, dwa razy większégo iak na przykład Wſtawa BD, łuku BA, równá się połowie cienciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wſtawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wſtawa ſtopniów 90, równá się promieniowi, i ieſt náywiększą, nazywá się dlá tego *Wſtawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wſtawy łuków większych od czwártéy części okręgu koła, zmnieyszaią się coráz bardziéy zaczą wszy od 90° aż do 180°; tak dalece, że Wſtawa

 ſto-

---

wniéy *S. Jns.* Przepisuiący iakié dziéło Matematyczné, nie wiedząc znaczéniá wyrazu tego skróconégo, opuścił punkt oddzielaiący té dwa wyrazy, i dáwszy słowy *Sins* zakończénié łacińskié, napisáł *Sinus*, i stąd potém wzięté podobno było to nazwisko.

ſtopniów 180° równa się ♀. Wſtawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mnieyszego od 180° ieſt ta sama, która i łuku mnieyszego od 90°, a spełniaiącego łuk pierwszy do 180°. J tak na przykład Wſtawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80° wſtawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowe *spełnienie* łuku do 180° albo do pół okręgu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcûs*

Co się tycze łuków większych od półokręgu koła, o tem nie ma potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promień na przykład CF, ieſt Wſtawą naywiększą ze wszyſtkich, czyli Wſtawą ſtopniów 90°, Wſtawa zaś od łuku AFb, większego od czwartey części tego okręgu, ieſt ta sama, co i łuku ab, mnieyszego od czwartey części tegoż okręgu; (który to łuk oſtatni spełnia pierwſzy do półokręga), idzie zatem, że do ułożenia Tablicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wſtawy tych łuków, które są mnieysze od 90°.

323. *Wniosek* 5, Wſtawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się maią do siebie, iak tychże kół promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wſtaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez

regułę

regułę trzech i wyſtawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt we śrzodku, na przykład ACB, tyle ſtopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wſtawa łuku AB, Wſtawą także i kąta ACB.

Wſtawa tedy kąta, iest proſtopadła, ſpuszczona od punktu iakiego w jednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta; Cokolwiek zatem ſpowiedziało się o wſtawach łuków, wszyſtko to przyſtósować można i do wſtaw kątów. J tak, Wſtawy kątów rosną od 0, aż do wſtawy 90°; która się równa promieniowi, zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wſtawy 90°, aż do wſtawy 180. (która ieſt $= 0$;) i wſtawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta oſtrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wſtawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli dwie liniie są wſtawami dwóch katów, względem tegoż samego promienia, czyli Wſtawy całey; te liniie tak się do siebie mieć będą, iak Wſtawy tychże dwóch kątów.

325.

325. *Twierdz.* 1. W każdym Tróykącie boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

Tab. XVIII. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ABC; bok iego na przykład AC, tak się má do boku BC = iak wstawa kąta B, do wstawy kąta A.

Dowodz: z wykreśléniém. Na danym Tróykącie opiszmy koło, i poprowadźmy śrzednicę CD, i cięciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC są równé, bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swémi iednakowy łuk BC. Dlá téyże przyczyny równé są także i kąty: ADC, ABC. Oprócz tego, kąty: CBD, CAD są proste, bo są w półkole; więc Liniie CB, CA, będą wstawami kątów: CDB, CDA względém téyże samey wstawy całey, czyli promienia CD; a zatém tak się mieć będą do siebie té liniie, iak wstawy kątów A i B.

Można ieszcze i następuiącym sposobém tego samégo dowieść.

Opisáwszy koło na danym Tróykącie, połowy boków iego, będą wstawami połowy kątów we śrzodku im przeciwnych; a zatém będą też i wstawami kątów Tróykąta przeciwnych tymże bokóm, (biorąc za Wstawę całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych: a że połowy tak się maią do siebie, iak ich całości;

więc

więc też i całe boki Tróykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

326. *Wniosek.* Za pomocą Táblicy na Wstawy ułożoney podług promienia iakiegokolwiek, można doyśdź stósunku boków Tróykąta, którego kąty są nam iuż wiadome; a zatém, gdy ieszcze i bok ieden tegoż Tróykąta iest wiadomy: będzie można znaléźć i dwa insze iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Táblicę Wstáw podług promienia podzielonego n. p. na 100 000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłászcza w táblicach do zwyczaynieyszego używania ułożonych, znáyduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić, przydano i táblicę logarytmów, Wstáw tychże. W takowych iednak táblicach, gdzie i logarytmy wstáw znáyduią się, uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatém, iak gdyby logarytm iéy, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznácza, iż wstawa zawiérá w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcey; tak, iak cechá logarytmu wstawy całey, toiest, liczba: 10, oznácza, iż wstawa cała zamyká w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie

Nie wykładá się teráz iak ułożone są te táblice; podany tylko będzie sposób ich używaniá. W táblicach tych znáyduiémy na dwóch kartach iednéy obok drugiey, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów, których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Táblica tych wstáw po lewéy ręce kart, rozciągá się od 0, aż do 45,0. Táblica zaś po prawéy ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Té kąty których stopnie wyrażone są po prawéy ręce, nazywaią się *dopełnieniém* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełnieniá* (sinus complementi) czyli krócéy, *Dostawami* (Cosinus.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta równá się kwadratowi promieniá, czyli wstawy całéy.

Táb. XVIII. *Fig. 1.* Bo ponieważ dwa łuki, n. p. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełnieniém iedén drugiego; Wstawa BG, łuku FB, równá iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratém wstawy BD równá się kwadratowi promieniá BC: więc i summa kwadratów z BG i BD, równá będzie kwadratowi promieniá BC.

329. *Przystósowanié.* Maiąc na polu wymierzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiéma liniami wykie-

ro-

rowanémi ku iednému célowi, znaléźć tych ostatnich dwóch liniy długość?

Niechby Tróykąt ABC, wyrażał Tróykąt na polu zawarty między podstawą wymiérzoną i dwiéma liniiami dążącémi ku iednému célowi. Táb. XVIII. Fig. 3.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A+B = 122°
a zatém — 180° — (A+B) = 58° = C
Wstawa kąta C: Wstawy kąta A = AB: BC wsta: C: wsta: B = AB: AC

Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa = 12,963 435 2.
Log: wst: C = 9,928 420 5.
Różnica = Log:BC = 3,035 014 7.
A zatém bok BC = prawie 1084.

Z piérwszéy tedy proporcyi znáydziémy bok BC, dodaiąc do siebie logarytmy wstawy A, i boku AB, a odiąwszy od ich summy, logarytm wstawy C; rożnica albowiém dwóch logarytmów ostatnich, pokazuie logarytm boku BC. który bok w táblicy osobnéy logarytmów liczb, znaydziemy przy tymże logarytmie = 1083, 96. toiest prawie = 1084.

Po-

Podobnym sposobém znáydziémy z drugiéy proporcyi, i drugi bok AC = 1 345, 76.

Dlá skróceniá rachunku, można z początku zaráz odiąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrážaiącéy bok AB, dodáwszy do cechy tego drugiégo logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś dodaiąc osobno logarytmy wstáw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrážaiącéy bok AB, dochodziémy dwóch boków inszych.

Możná także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodáwaniá, zamiást odeymowaniá, kładąc dopełnieniá logarytmów. (g) na mieyscé tych, które przez nich są dopełnioné.

J tak w piérwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest piérwszym wyrazém proporcyi, z któréy szukámy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów śrzednich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodámy do-

---

(d) Dopełniéniém logarytmu nazywá się ta liczba, którá z nim razém czyni logarytm promiénia, iak na przykłád, 0,071 579 5 z logarytmém wstawy C. 9,928 420 5 = 10,000 000 00.

dopełnienie logarytmu wstawy kąta C; ta summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przykład. Dopełnienie logarytmu wstawy - - C = 0,071 579 5.
Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa zmnieyszona liczbą 10. - = 3,035 014 7 = Log: BC.

Więcey ieszcze podobnych przykładów Ucznióm podadź należy.

330. *Przyst:* 2. Maiąc dane kąty, i bok ieden Tróykąta, znaleźć powierzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie ten sám, co wyżey, Tróykąt, którego wiadome nám są kąty i podstawa AB: szukáymy powierzchni tego Tróykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C: Wst: A = AB: BC.

Promień: Wst: B = BC: CD.

Więc Pr: + Wst: C: wst: A + wst: B
- - = AB: CD.
= AB²: AB + CD
= AB²:2. Powierzchni

A za-

A zatém, 2 Pr.+ wst. C: wst. A +
. - wst. B = AB^2: Powiérzchni.
Log. AB = 3. 079 181 2.

Logarytm tén dwa razy wzięty =
Log: - Ab^2 = 6, 158 362 4.
Log: Wst. A = 9, 884 254 0.
Log: Wst. B = 9, 978 206 3.
Summa = 26, 020 822 7.

Log: 2 = 0, 301 030 0.
Log. Wst. C = 9, 928 420 5.
Log. Pr. = 10, 000 000 0.
Summa 20, 229 450 5.

Różnica tych dwóch summ: 5, 791 372 2, iest logarytmém liczby, która oznaczy powiérzchnią, a ta będzie = 6 185 46. blizko.

Proporcyá tá, z któréy doszliśmy powiérzchni Tróykąta, tak się wyrażá: Prostokąt z Wstawy całéy, czyli z promiénia, i z wstawy kąta przeciwnégo iednému bokowi, tak się má do prostokąta wstáw dwóch katów przy tym boku; iak się má ténże sám bok, do prostopadłéy nań spuszczonéy od wiérzchołka kąta przeciwnégo: albo też, prostokąt z promiénia, i z wstawy kąta przy wiérzchołku, tak się má do prostokąta z wstáw dwóch kątów przy podstawie; iak

iak się má podstawa do wysokości Tróykąta.

331. *Przyſt.* 2. Maiąc dané w liczbach dwa boki Tróykąta, i kąt między niémi zawarty, znaleźć powierzchnią tego Tróykąta przez iednę proporcyą.

Niechby W Tróykącie ABC, znané były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podſtawę AB, proſtopadłą CD; będzie

Pr. Wſt. A=AC: CD.
=AC × AB: CD × AB.
=AC × AB: 2 powierzchni

A zatém
Pr. Wſt. $A = AC \times AB : \frac{\text{powierzchni.}}{2}$

To ieſt: tak się má promień do wſtawy iednégo z kątów Tróykąta, iak połowa proſtokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Tróykąta.

Niech będzie AB=384.
AC=405.
A= 50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB = Log. 192 =		2,283 301 2.
Log. AC =	- -	2,607 455 0.
Log. Wſt. 50° =	-	9,884 254 0.

Summa

Summa zmnieyszona liczbą 10. (toieft logarytmém promienia) =4,775 010 2. a zatém powierzchnia którey szukaliśmy =5 9767.

Tab. XVIII. Fig. 4. 332. *Przyftós.* 4. Maiąc dany Tróykąt proftokątny, którego wiadoma ieft przeciw proftkątna i iedno ramie kąta proftégo, znaleźć insze dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwszy w tym Tróykącie przeciwproftokątną za promień, ramiona kąta proftégo, będą oraz wftawami kątów im przeciwnych; a zatém gdyby daná przeciwproftokątná była wyrażona przez 100 000, i znaczyła promień na tylé części równych podzielony; szukaiąc w táblicach między wftawami, lub doftawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany, a liczba ftopniów odpowiadaiąca tey wftawie, pokázałaby ważność w ftopniach, kąta przeciwnego bokowi danému.

Gdyby zaś przeciwproftkątná, przez inszą liczbę była wyrażona, a nie przez tę, którąby się równała wftawie całéy w táblicach znáyduiącéy się; w takim razie użyćby trzeba naftępuiącéy proporcyi:

BC: AC = Pr. wft. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC

AC = 1248.

Log. AC = 3,096 214 6.

Przydáwszy log. Pr. = 13,096 214 6.

Log. BC = 3,189 771 0.

Różnica = 9,906 443 6. =
Log. Wſt. B.

B = 53°, 44′ — toieſt, 53 ſtopniów, i coś mniey niż 44 minut.

C = 36°, 16′, + toieſt 36 ſtopniów, i coś więcey niż 16 minut.

Pr. wſt. C = BC: AB.

Log. BC: = 3,189 771 0.

Log. wſt. C = 9,771 987 2 +

Odiąwszy Log. promienia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,961 758 2 + = Log. AB: a zatem AB = 915,7 +

Jeśli tylko samego boku AB, znalezienie ieſt potrzebne, można ſkrócić rachunek, biorąc summę logarytmów ſummy i różnicy przeciw proſtkątney, i boku danego, i dzieląc tę ſummę przez 2: które

to

to działanie na tém się zasádzá, że kwadrat boku AB, równá się różnicy kwadratów przeciw prostkątney BC, i boku drugiégo AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, toiest prostokątowi z summy BC + AC i z różnicy: BC — AC. Summa tedy logarytmów summy: BC + AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmem kwadratu, AB^2, a zatém połowa tey summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiastku, toiest boku AB.

BC + AC = 279 6.

BC — AC = 300.

Log. (BC + AC) = 3,446 537 2.

Log. (BC — AC) = 2,477 121 3.

Summa = - 5,923 658 5.

Połowa = - 2,961 829 2. = Log. AB.

A zatém bok AB = 915,8+.

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, która z dwóch odmiennych rachunków wypádá, postrzegamy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całéy ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w piérwszym rachunku braliśmy kąty B i C

B i C w samych stopniach i minutach pierwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przystós: 5.* Maiąc dany w Tróykącie roztwartokątnym kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaleźć drugie ramie i dwa insze kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, którego dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iemu przeciwny, i ramie iedno AC; znaleźć insze kąty: B i C, i bok AB. Táb. XVIII. Fig. 5.

Sposob 1. postępowania. Z tey proporcyi, BC: AC = Wst: A: wst: B; doydziemy kąta B, a odiąwszy od 180°, summę kątów A i B, reszta pokaże kąt C.

Z drugiey proporcyi, wst: A: wst: C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposob 2. Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Tróykącie prostokątnym ACD, którego bok AC i kąt A iest wiadomy, można doyśdź dwóch boków CD i AD, ze dwóch następuiących proporcyy.

Pr. Wst: A = AC: CD.
Pr. Dostawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Tróykącie prosto-

kątnym BCD, przeciwprostkątną BC, i iedno kąta prostego ramię. CD, będzie można doyśdź (332.) boku BD, od którego odciąwszy AD, znáydziemy bok AB.

Przykłady wyżey podane iuż dosyć obiaśnić były powinny, iak daley sobie w tem działaniu postąpić.

Táb. XVIII. *Fig.* 6. Podobnego sposobu użyć należy gdy kąt ostry iest dany, i bok iemu przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko iest różnica, że w drugim sposobie postępowaniá liniiá AB, będzie summą, a nie różnicą linii BD, AD.

Táb. XVIII. *Fig.* 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, mnieyszy iest od boku danego AC, który służy za ramie temuż kątowi; w takim razie wstawa kąta B wynaleziona z proporcyi: CB : AC = wst. A wst. B może bydź równie wstawą dwóch kątów B, B, iednego ostrego, a drugiego roztwartego, i tamten spełniaiącego do 180°. Podług drugiego sposobu postępowaniá, liniiá AB, AB może bydź summą, albo różnicą linii AD, BD, albo BD: co daie dwa odmienne Tróykąty: ACB, ACB: które lubo maią w sobie dwa boki dane i kąt ostry także dany; różnią się iednak trzecim bokiem, i dwoma inszemi kątami. Zgádzá się to zupełnie z tem, co się iuż w Geometryi okázało w Rozd. II.

334.

334. *Przyſtoſowanie* 6. Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą bydź wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, ieſt wſtawą połowy kąta we śrzodku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.		*Połowy kątów we śrzódkukątów*		*Wſt: Połowy we śrzodku.*
3	-	60°	-	86602.
4	-	45°	-	70711
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	$25^\circ\frac{5}{7}$	-	43388
8	-	$22^\circ\frac{1}{2}$	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18	-	30902
11	-	$16^\circ\frac{4}{11}$	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	$11^\circ\frac{1}{4}$	-	19509
20	-	9°	-	15643
24	-	$7^\circ\frac{1}{2}$	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Te wſtawy, dwa razy wzięte, są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień=100 000.

 Niech-

Niechby był Tróykąt proſtokątny, którégo wiadomé są dwa ramiona kąta proſtégo; trzeba znaléźć przeciw proſtkątną, i dwa inszé kąty.

Już się wyżéy pokázało, że maiąc dané dwa boki w Tróykącie proſtokątnym, znáyduie się przeciw proſtkątná, dodawszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy piérwiáſtek kwadratowy. Ale gdy liczby oznáczaiącé wielkości boków danych, są bardzo wielkié; nie mało czasu trzebaby na podniesiénié tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielká, iż z niéy piérwiáſtku kwadratowégo wyciągnąć przez logarytmy nié można, a wyciągać go zwyczaynym sposobém długáby prácá była; przeto dlá większéy wygody, w téy i wielu inszych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inszé ieszcze, oprócz wſtáw, linije.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiégo, a od iednégo końca, tego łuku niech będzie prowadzoná ſtyczná, tak daleko, aż się ſpotká z promiéniém przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część ſtycznéy zamknięta między punktém dotknięciá koła, i promiéniém przedłużonym nazywá się *Styczną Tróykątmiérſką*) Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku.

łuku. Liniiá zaś zawartá między śrzodkiem koła, i między punktém, gdzie promień przedłużony przeciná ſtyczną, nazywá się *Sieczną Tróykątmiérſką*. (Secans Trygonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Jtak liniie AT, CT są, piérwszá ſtyczną, a drugá sieczną łuku AB. Jest także piérwszá liniiá ſtyczną, a druga sieczną kąta ACB, biorąc za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, ieſt dopełnięniém do 90°, łuku AB: ieżeli tedy poprowadzimy ſtyczną FP, aż do iéy spotkaniá się z promieniém CA przedłużonym; liniiá FP, będzie ſtyczną, a CP sieczną dopełnieniá łuku AB, a inaczéy ieſzcze piérwszá nazywá się *Doſtyczną* (cotangens) drugá zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB, Táb. XVIII. *Fig. 1.*

Jak względém wſtáw, tak względém ſtycznych i siecznych, uważano w tablicach, iedné łuki tylé przewyższaiącé 45°, ilé drugié, nie dochodzą 45°; uważano zatém i co do ſtycznych, i co do siecznych, dopełnięniá iednych łuków względém drugich.

336. *Na przykład*; Tróykąty DCB, ACT są podobné; więc.

1. DC: DB=AC: AT, toieſt doſtawá tak się má do wſtawy; iak promień do ſtycznéy.

2.

2. DC: CB=AC: CT, czyli doftawa do promienia, iak promień do siecznéy.

Tak też dlá podobieństwa Tróykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wftawa do doftawy iak promień do doftycznéy.

2. Wftawa do promienia, iak promień do dosieczney.

Maiąc ftyczne, łatwo można wyrachować doftyczne. Bo, ponieważ podobne są Troykaty ACT, FPC, będzie, AT: AC= CF: FP, toieft, promień będzie śrzednim Geometrycznym między ftyczną i doftyczną; Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równá się summie logarytmów ftyczney i doftycznéy.

337. Styczne rosną, zacząwszy od 0, aż do stycznéy 45°, która się równá promieniowi, (bo w tym razie Tróykąt ACT będzie równoramiennym) i daléy ieszcze rosną aż do 90°, których styczná będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie: a zatém większą iest, od wszelkiey długości któráby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym, także iak i styczne rosną sposobém.

338.

338. Niechby był Tróykąt iakikolwiek prostokątny, na przykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB. Táb. XIX. Fig. 1.

Wziąwszy za promień, na przykład liniią CA, liniiá AB będzie styczną, a liniiá CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, toieſt, promień wyrażony w táblicach przez 100000; liczba stopniów, przy którey znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą liniią AB, czyli styczną, pokázałaby ważność kąta C: i znowu liczba między siecznémi odpowiadaiącá kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniiá AC, nie była w tych liczbach wyrażoná, w których wyrażoná iest wstawa cała, czyli promień táblic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye; pierwszą AC: AB = Pr. styczney C, z którey dóydziemy ważności kąta C, drugą Pr: Siecz: C = AC: CB.

Przykł: Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13,754 195 4.
Log. AC - 3,927 575 7.

Ró-

Różnica, czyli Log. styczney - - -
- - - - - C = 9, 826 619 7.
a zatém kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3, 927 575 7.
Log. siecz: C (odciąwszy Log. Pr.) = 0, 080 661 0.
Summa — 4, 008 236 7. =

Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwaga*. Gdyby przyszło wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy ważność przeciw prostkątney BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193; a zatém nie zgadzaiącą się z ważnością wyżey znalezioną, 10191 +; co stąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugie, i przestało się na samych stopniach i minutach pierwszych: i to opuszczénie sprawiło, że ważność BC, mnieysza iednością prawie wypadła; ale uchybiénie takowe iest bardzo małe, gdyż od prawdziwey ważności różni się tylko mało co więcey iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa téy omyłki taká bydź może.

Ponieważ różnica między logarytmém stycznéy C, znalezionym, i logarytmém tablic naybliższym, iest 874, a różnica dwóch

dwóch logarytmów táblic mnieyszégo i większégo od logarytmu znalezionégo, iest: 2730°, więc będzie, 2730: 874 = 60"; 19", a zatém kąt C = 33° 51' 19"

Log. - AC = 3, 927 575 7.
Log: siecz: C
(odciąwszy Log.P.) = 0, 080 688 0.

Sum: czyli Log: BC = 4, 008 263 7.
więc BC = 10 192+ = 10 192,1

340. *Przystósowanie.* W Tróykącie, w którym wiadomé są dwa boki, i kąt zawarty między niémi, znaleźć bok trzeci, i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, w którym dané są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba stąd doyśdź boku AB, i dwóch inszych kątów. Tab. XIX. *Fig. 2.*

Rozwiązanie. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC, w Tróykącie prostokątnym BCD wiémy przeciwprostkątną BC, i kąt dany C, a zatém doydziémy dwóch boków BD, DC: a że wiadomá także iest podstawa AC; więc odiąwszy CD od AC znaydziémy AD; i znowu w Tróykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostégo, doyśdź będzie możná (338) inszych dwóch kątów, i przeciwprostkątnéy AB.

Tén

Tén sposób w tym iest nie wygodny, że trzeba cztéry uczynić proporcye, aby doyśdź boku AB. Jako zaś to, co z każdéy z piérwszych trzech proporcyy wypada, wchodzi w czwartą proporcyą, tak i omyłki tam popełniané, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym, co z ostatniéy proporcyi wypadnie, uniknąć uchybienia, należy iak naydokładnieyszy rachunek czynić w trzech piérwszych. J to ieszcze przydadź potrzeba, że w tym sposobie działania szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako téż i wysokości BD, lubo o nie nié masz zapytania.

341. Gdyby przyszło dochodzić saméy tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć następuiącego sposobu.

$AB^2. = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$

A że ieſt BC: CD=Pr: Doſtawy BCD

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = Pr. Doſt:BCD.$

a zatém $2AC \times CD = \frac{2AC \times BC \times Doſt. BCD}{Pr.}$

A stąd $AC^2 = AC^2 \times BC^2 - \frac{2AC \times BC \times Doſt. BCD.}{Pr.}$

Że

Że zaś tey ostatniey ilości nie można zawsze rozłożyć na insze mnożące ią ilości; więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa się pospolicie następuiącey proporcyi.

342. *Twierdz:* 2. Summa dwóch boków Tróykąta, tak się ma do różnicy tychże boków; iak styczna połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokóm do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzód wyłożyć uczniom, co się rozumie, przez wyrazy tey proporcyi; a w szczególności pokazać im, że stósunek między stycznemi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie iest ten sam, co między stycznemi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym bok AB, mnieyszy iest od boku AC; w tym Tróykącie będzie. Tab. XIX. *Fig. 3.*

$$AC+AB:AC-AB=\text{styczn: }\frac{B+C:}{2}\text{ stycz: }\frac{B-C.}{2}$$

Dowodz: Wziawszy AD=AB, i pociągnąwszy BD Tróykąt równoramienny ABD, i Tróykąt nie równoramienny ABC, maią kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów

tów ABC, ACB; a zatém ieden z kątów Tróykąta równoramiennego, n p. kąt ABD, równá się połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Tróykątą ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składá się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów: a że kąt ABD, ieft połową ich summy; więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Liniiá DC ieft różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równé części w punkcié E, liniiá CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. A że bok większy AC, równá się połowie summy wráz z połową różnicy tychże dwóch boków; więc AE będzie połową ich summy, gdy CE ieft połową różnicy; a zatém linie AE, CE tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całé działanié rozchodzi się, aby pokázać, iż ftyczné kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie, iak liniie. AE, CE.

Z Punktu A, fpuśćmy na BD, proftopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Ponieważ Tróykąt BAD ieft równoramiennym; liniie BF, FD będą równé; a że też są równé liniie DE, CE; więc pociągnąwszy liniią FE, podobné będą Tróykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległé; a zatém i Tróykąty AFE, AGC są podobné, będzie więc AE: CE = AF:

AF: FG. Że zaś wziąwszy za promień liniią BF, liniie FA, FG. będą ſtycznemi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE:CE=ſtycz:ABD:ſtycz: CBD; albo

$$\frac{AC+AB}{2} : \frac{AC-AB}{2} = \text{ſtycz}: \frac{B+C}{2} : \text{ſtycz}. \frac{B-C}{2}$$

albo nakoniec,

$$AC+AB : AC-AB = \text{stycz}: \frac{B+C}{2} : \text{ſtycz}: \frac{B-C}{2}.$$

343. *Przyſtósowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadome, będzie wiadomá ich ſumma AC+AB, i ich różnica AC—AB; gdy także wiémy kąt A, wiedzieć tém sámém będziémy summę i połowę summy dwóch inſzych kątów B i C, a zatém i ſtyczną połowy téy ſummy; więc i czwártégo wyrazu proporcyi poprzedzaiącéy, toieſt stycznéy połowy różnicy tych dwóch kątów doydziémy: a stąd wiadomá nám będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy, gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodámy, znáydziémy kąt większy B, a odiąwszy połowę różnicy od połowy ſummy, okáże się kąt mnieyszy C. Znáydziémy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie - -
- AC=2452. AC+AB=4296.
AB=1844, AC—AB= 608.
A= 44° B + C= 136°.
$\frac{B + C}{2}$= 68°.

4296;

$4296 : 608 = \text{stycz.}\, 68^\circ : \text{stycz:} \frac{B-C}{2}$

Log. stycz: 68° = 10,393 590 4,

Log: 608 = 2,783 903 6,

Summa - - 13,177 494 0.

Log: 4296 = 3,633 064 3.

Różnica = 9,544 429 7. =

- - Log: stycz: 19. 18′+ toiest i coś więcey

$\frac{B-C}{2} = 19^\circ.\, 18'. +$

A że $\frac{B+C}{2} = 68^\circ$ więc

- - $B = 87^\circ.\, 18', +$

$C = 48^\circ.\, 42'. -$

Wst: C: wst. A = AB: BC

Log: AB = 3,265 760 9.

Log: wst: A = 9,841 771 3.

Summa = 13,107 532 2.

Log.

Log. wst. C= 9,875 792 7. —

Reszta, toiest Log: BC=3,231 739 5 +
BC= 1705+

Aby się przeświádczyć o dokładności tego działania szukáymy BC, i przez drugą proporcyą; wst: B: wst: A=AC: BC.

Log. AC=3,389 520 5.
Log. wst: A=9,841 771 3.

Summa= 13,231 291 8.
Log. wst. B=9,999 517 6 +

Reszta =3,231 774 2—
więc BC= 1705, 2 —

344. *Przyſtósowanié* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch mieysc nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podstawę i wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie linije wykierowané ku dwóm punktóm, których odległości szukámy. Można doyśdź i przez rachunek żądaney odległości.

Niech będzie AB podstawa wymierzoná, i wyznaczoné kąty: XAB i AB, XBA, i BA. Tab. XIX. Fig. 4.

Po-

Ponieważ w Tróykącie XAB, wiemy dwa katy przy podstawie; odiąwszy więc ich summę od dwoch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokaże kąt trzeci AXB.

Podobnym sposobem doydziemy i kąta AYB.

W Tróykącie AXB, maiąc wiadomą podstawę AB, i wszystkie kąty, można doyśdź dwóch inszych boków, a w szczególności linii AX.

Podobnie i w Tróykącie AYB z wiadomego boku AB, i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa insze boki, a w szczególności liniią AY.

W Tróykącie na koniec XAY znaiąc dwa boki AX, AY, i kąt XAY między niemi zawarty, (który iest różnicą między kątem wyznaczonym XAB, YAB;) można doyśdź linii XY, toiest, żądaney odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczenie linii XY, zawisło od linii AX, AY; dokładność też w wyznaczeniu linii XY, zawisła od tey dokładności, z którą dwie tamte liniie były wyznaczone.

Przy-

Przykład. Niech będzie

XAB = 77° więc AXB = 49°.

YAB = 42° AYB = 36°.

YBA = 102° XAY = 35°.

XBA = 54°.

AB = 1200.

Wsta: AXB: wst: XBA = AB: AX.

Log: AB = 3, 079 181 2.

Log: wst. XBA = 9, 907 957 6.

Summa = 12, 987 138 8.

Log. wst. AXB = 9, 877 779 9.

Reszta = 3,109 358 9, = Lo: AX

AX 1286, 35.

Wsta. AYB: Wst. ABY = AB: AY.

Log. AB = 3, 079 181 2.

Log. Wst. ABY = 9, 990 404 4.

Summa = 13, 069 585 6.

Log. Wst: AYB = 9, 769 218 7.

Reszta = 3,300 366 9. = Log: AY.

Więc AY = 1996, 95.

Znalazszy bok AX = 1286, 35.

AY = 1996, 95.

W Kąt

Kąt między témi bokami zawarty XAY = 35.

Będzie - - AX + AY = 3283,30.

AY — AX = 710,60

AXY + AYX = 145°.

$\frac{AXY + AYX}{2}$ = 72° ½.

Więc (podług Twiérdz: 2. §. 342)

3283,3:710,6 = Stycz: 72 $\frac{10}{2}$: Stycz: - - - - $\frac{AXY - AYX}{2}$

Log. Stycz: 72 $\frac{10}{2}$ = 10, 501 277 7.

Log. 710, 6 - = 2, 851 625 2.

Summa = 13, 352 902 9.

Log. 3, 283 3 = 3, 516 310 6.

Różnica = 9,836 592 3. = Log: Stycz: 34°28′.

Więc $\frac{AXY - AYX}{2}$ = 34 28′.

A że iest $\frac{AXY + AYX}{2}$ = 72 30.

Więc AXY = 106 58.

AYX = 38 2.

Ma-

Maiąc wiadome wszystkie Kąty w Tróykącie XAY, i procz tego dwa boki: AX, AY; znaydziemy bok trzeci XY, toiest odległość, którey szukamy; a to przez iednę z tych dwóch proporcyy.

Wst. AYX ; Wst. XAY = AX: XY

Albo, Wst. AXY: Wst. XAY = AY: XY.

Szukaymy boku XY, przez pierwszą na przykład proporcyą; będzie

Log. - AX = 3, 109 358 9.

Log: Wst. XAY = 9, 758 591 3.

Summa = 12, 867 950 2.

Log. Wst: AYX = 9, 789 665 2.

Różnica = 3, 078 285 0 = Log. XY.

Więc XY = 1197, 525.

Zostaie ieszcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Tróykącie, szukamy kątów iego.

Sposób zwyczaynie używany, zawisł na tem, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wierzchółku kąta iey przeciwnego.

345. *Twierdz: przybrane.* Podstawa Tróykąta, tak się ma do summy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Táb. XIX. *Fig.* 5. Niech będzie Tróykąt ABC, w którym z wierzchołka C, spuszczona iest prostopadła CD, na podstawę AB; w tym Tróykącie, AB: BC + AC = BC — AC: BD — AD.

Od punktu C, iak od śrzodka, promieniem CA nakreślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatem

BE = BC + AC (bo AC = CE;)

BF = BC — AC (bo AC = CF:)

BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczne BA, BE od iednego punktu B wychodzą; więc (231) BA: BE = BF: BG, toiest, tak się ma podstawa BA do summy dwóch boków = BE; iak się ma różnica tychże boków = BF, do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadła CD spuszczona z wierzchołka kąta C na Podstawę.

346. *Przystósowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy summę i różnicę; wie-

wiedzieć będziemy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżey pokázało: będzie albowiem większy odcinek $BD = \frac{AB+BG}{2}$, a mnieyszy $AD = \frac{AB - BG}{2}$.

A że, BC: BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost: A.

Więc doydziemy i kątów B, i A.

Przykład. Niech będzie
AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log: BC + AC = 3, 189 490 3.
Log: BC — AC = 2, 509 202 5.

Summa = 5, 698 692 8.
Log: AB = 3, 079 181 2.

Reszta = 2, 619 511 6.

Więc BD — AD = 416, 4. bardzo blizko.

$\frac{AB}{2} = 600.$

$\frac{BD - AD}{2} = 208,2$

Summa = 808, 2. = BD.
Różnica = 391, 8. = AD.
BC: BD = Pr. Dost: B.

Log:

Tab. Fig.

Log: BD z przydanym Log: Pr. = - - - - - - 12, 907 518 8.
Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 936 707 2 = Log: Dost: B.
Więc Kąt B. = 30° 11′ 15″.
AC: AD = Pr. Dost. A.
Log. AD = 2, 593 064 4.
Log. Pr. = 10, 000 000.
Summa = 12, 593 064 4.
Log. AC = 2, 786 751 4.
Reszta = 9,806 313 0. = Lo:Dost.A
więc Kąt A = 50° 11′ 37″.
C = 99 37 8.

Dlá zapewnieniá się o tem, możná szukać, ieżeli stósunek Wstáw Kątów: A, i B, równą się, iak powinien, stósunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w samey rzeczy równał się, gdy w proporcyi, którey trzéma pierwszémi wyrazami będą: BC. AC. Wst. A. za czwárty wyráz wypadnie Wstawa Kąta B, teyże samey, co wyżey ważności.

Log: Wst: A = 9, 885 481 1.
Log. AC = 2, 786 751 4.
Summa = 12, 672 232 5.

Log:

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 701 420 9. = Log: Wst: B.

Kąt B, odpowiadaiący tému Logarytmowi różni się mniéy niż $\frac{1\text{''}}{2}$ od wyżéy znalezionégo.

347. *Uwaga.* Nie trzeba opuszczać takowych doświadczeń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły iedne od drugich.

W tym ostatnim razie, náylepiéy iest wziąść za podstawę bok naywiększy Tróykąta: bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziémy, iż kąty przy téy podstawie są ostré.

PRZYDATEK I.

Przystósowaniá Trygonometryi do różnych działáń na gruncie.

348. *Przystósowanié* 1. Wyznaczywszy na gruncie, a potém wyrachowáwszy położéniá i odległości dwóch punktów, względém iedney podstawy, wzięta była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iéy do wyznaczéniá położéń innych Punktów, któré z piérwszych stanowisk, albo były nie widzialné, albo też od nich bardzo odległé. Trzeba teráz wyrachować położéniá tych ostatnich punktów względém piérwszéy podstawy... Niech

Tab. XX. Fig. 1. Niech AB wyrażá pierwszą podstawę; XY, dwa punkta, których położénia, i odległości wyznaczoné iuż są względém tey podstawy, przez wymierzénié kątów przy A i B. Weźmy potém XY za drugą podstawę dla wyznaczénia położenia punktu Z, niewidzialnégo z pierwszych stanowisk: A i B, albo od nich bardzo odległégo. Jakże to położénié punktu Z, wyznaczymy, względém pierwszéy podstawy AB?

Sposób postępowania przez rachunek:

1. W Tróykącie AXB wyznaczymy AX.

2. W Tróykącie AYB wyznáczmy AY.

3. W Tróykącie XAY wiadomé maiąc: AX, AY, i kąt XAY, wyznáczmy: XY, i kąt: AXY.

4. W Tróykącie XZY, wiadomą maiac podstawę, i kąty wszystkié, wyznáczmy XZ.

W Tróykącie AZX wiadomé maiąc: AX, ZX, i kąt AXZ wyznáczmy AZ.

Podobnie można wyznaczyć BZ.

349 *Uwága.* Tym sposobém postępuiąc, można także sprawdzać działania iedné przez drugié czynioné z różnych punktów stanowisk.

350. *Przyſtosowanie* 2. Do iakieykolwiek linii czyniącey kąt wiadomy z podſtawą stósować położenia punktów wyznaczonych iuż względem tey podſtawy.

Niech będzie AC liniia czyniąca kąt wiadomy z podstawą AB, i niech X, będzie punktem, którego położenie iuż ieſt wyznaczone względem podſtawy AB; trzeba stąd doyśdź położenia tego punktu względem linii AC. Táb. XX. *Fig.* 2.

Doydziemy tego, spuściwszy proſtopadłą XP na liniią AC, i wyznaczywszy wielkość tey proſtopadłey, iako też iey odległość AP od punktu A.

Sposób poſtępowania przez rachunek.

W Tróykącie AXB można było wyznaczyć liniią AX, kąt XAB ieſt też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAX, który ieſt różnicą kątów CAB, XAB. W Tróykącie tedy PAX, maiąc wiadome kąty, i przeciw proſtkątną AX, można będzie wyznaczyć linije: AP, i PX.

351. *Przyſt:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cięciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB liniia dana, na którey nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła. Táb. XX. *Fig.* 3.

Niech

Niech będzie C, śrzodek koła, szukanégo; poprowadźmy liniią CD do śrzodka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Tróykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danému, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD, iest iego dopełniéniém. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a zatém można wyznaczyć, promień koła szukanégo, z téy proporcyi; iak się má promień do dosieczney kąta danégo, tak się má połowa ciénciwy daney do proméenia koła, którégo szukámy.

352. *Uwága.* Stósunek AD do CD, równy iest stósunkowi wstawy całéy, czyli promiénia, do styczney kąta CAD.

A że, ieżeli AB iest bokiém wielokąta forémnégo, będzie CD promiéniém koła wpisanégo w ten wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta forémnégo, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promień kołą wpisanégo i opisanégo, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wstawa cała, tak się má do Dostyczney połowy kąta we śrzodku koła, iak połowa boku wielokąta do promiénia koła wpisanégo.

2. Wstawa cała tak má się do dosieczney połowy kąta we śrzodku, iak połowa boku wielokąta, do promiénia koła opisanégo.

353. *Przystósowanie.* 4. Wyznaczywszy trzy boki Tróykąta na gruncie iakim uważanego, i znaiąc kąty, pod któremi widzimy te trzy boki z jednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyraża Tróykąt, którego wszystkich boków iuż doszliśmy, niech X, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam się widzieć linije, AB, BC, AC; trzeba ieszcze wyrachować linije: AX, BX, CX. Táb. XX. *Fig.* 4.

Niech będą D, i E, śrzodki kół, których odcinki nakreślone na liniiach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równe tym, pod któremi widzieliśmy linije AB i BC. Punkt X będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promienie BD, BE, mogą bydź wyrachowane tak, iak w przystósowaniu 3.

W Tróykącie ABC, w którym wszystkie boki są wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD iest wiadomy, bo iest dopełnieniem kąta wiadomego AXB; więc wiadomy iest także i kąt CBD. A że wiemy i kąt CBE, który iest dopełnieniem kąta CXB; więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatem w Tróykącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt

BDF,

DBE, między niémi zawarty; a zatém można wyznaczyć wysokość BE, która iest połową linii szukaney BX; albo, (co krócéy ieszcze będzie) można, w tym Tróykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt we środku D, równa się kątowi XAB, wspieraiącému się na łuku dwa razy większym: a kąt weśrzódku E, iest spełniéniem (w téy figurze) kąta XCB, więc kąty, BAX, BCX są wiadome: a zatém w Tróykątach: BAX, BCX, wiémy kąty wszystkié, i boki: BA, BC; skąd będzie można wyznaczyć linie AX, BX, CX, których szukámy.

Jedén prawie iest sposób postępowaniá na iakiekolwiek położénie punktu X. W tém tylko bywá odmiénny, że czasém trzeba dodáwać, a czasém odeymować kąty znáyduiące się przy B; i że czasém kąty D i E, równé są kątóm przy A i C, a czasém są ich spełniéniém.

354. Rachunek tén może bydź ieszcze skróconym w niektórych przypadkach szczególnych.

Táb. XXI. *Fig. 1.* *Przykład* 1. Niech punkt X, znáyduie się na przedłużéniu iednégo z boków Tróykąta ABC, n p. na przedłużéniu boku AB.

W Tróykącie CAX, wiadomé są kąty A,

A, X, i bok C A; więc będzie można wyrachować boki: AX, CX.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A,B,C, będą na iedney linii. Tab. XXI. *Fig.* 2.

Prostokąty AX × CX, i BX × CX są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłey spuszczoney od X, na AB, i ze śrzednicy koła opisanego na Tróykącie AXC; drugi, prostokątowi z teyże prostopadłey, i ze śrzednicy koła opisanego na Tróykącie CXB więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugie. A że pierwsze tak się maią do siebie, iak liniie AX, BX, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie śrzednice; więc stósunek AX do BX iest wiadomy, bo iest równy stósunkowi śrzednicy koła opisanego na Tróykącie ACX, do śrzednicy koła opisanego na Tróykącie BCX albo równy stósunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podstawy w Tróykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AXB, a zatém wiadomy, i dwa ramiona równe dwóm wyżey spomnionym promieniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; liniie też AX, BX, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równa linii AB; tedy z dwóch następuiących proporcyy doydziemy boków: AX, BX.

1.

1. Jak się má podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się má promień pierwszy do AX.

2. Jak się má podstawa znaleziona, do podſtawy AB; tak się má promień drugi do BX.

Tym sposobém możémy téż doświádczać, czyli działaniá naszé czynioné na ziémi, były dokładné.

355. *Przyſtóſ.* Niech będzie daná liniiá prostá na gruncie: wyznaczyć bez mierzéniá odległość i położéniá względém téy linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa iéy końce.

Táb. XXI. *Fig. 3.* Niechby wiadomá byłá n p. liniiá AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdégo widzieć można końce A, i B, téy linii; wyznaczyć odległości, i położéniá tych dwóch punktów, C, i D, tak względém siebie, iak i względém linii A B, nie mierząc pierwéy żadnéy z tych odległości.

Z punktów C, i D, wyznáczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatém i kąty: ACD, BDC.

Dáwszy iakąkolwiek wáżność linii CD, możnáby z niéy dochodzić wáżności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdy

Gdybyśmy przypadkiem ważność téy ostatniéy linii AB, znaleźli równą prawdziwey iéy ważności, którą wiémy; byłoby to dowodém, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatém i inszych liniy.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB nie była równa ważności iéy wiadoméy; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się ma ważność mniemaná linii AB, do ważności iéy prawdziwéy, tak się ma ważność mniemana linii CD, do ważności iéy prawdziwéy.

Przystósowania do miar wysokości.

Mogą Nauczyciele namiénić tylko o sposobach wyznaczénia wysokości iakiéy, czyli to przystępnéy, czyli też nie dostępnéy przez samé żérdzie, albo przez odbiianié promiénia światła padaiącégo na powiérzchnią iaką płaską i sposobną odbiiania, albo na koniec przez wielkość ciénia rzuconégo od tego przedmiotu (*obiectum*) którégo wysokość wyznaczyć mamy.

Piérwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich i z przyczyny łatwości, iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiéwać o działaniach, choćby też z naylepszé-

mi

mi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie iakiéy wysokości; iednostayna albowiém w sobie wysokość, n p. góry iakiey, może się wydawać czasém większą, a czasém mnieyszą, podług nie iednakowégo stanu, w którym się znaydować zwykła nasza *Powiétrznia*; (atmosphera) iako o tém obszerniéy będzie w Fizyce.

356. *Przystós.* 1. Niech będzie iaka Wysokość nie wiadoma, do któréy iednak można przystąpić; trzeba wyznaczyć iéy wielkość, z punktu iakiégo oddalonégo od téyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie obranégo, aż do spodku téy wysokości: od tegoż punktu uważaymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowéy dwie linije, iedna ku wierzchołkowi téy wysokości, a druga poziemnie wykierowana. Znaydziémy wielkość téy wysokości nad liniią poziémną (którą perspektywa poziemnie ustawioną pokazuie) przez następuiącą proporcyą: iak się ma wstawa cała do styczney kąta uważonégo, tak się ma podstawa wymierzona do wysokości szukanéy. Dodawszy do téy wysokości, wysokość narzędzia, znaydziémy całą wysokość, któréy szukaliśmy. (g) 357.

(g) W dalszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętać, aby wysokość narzę-

357. *Uwága*. Rzádko się tráfiá, aby wcale przystąpić možná do spodku wysokości, którą wyznaczyć przypádá. Tak na przykład, maiąc wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży iakiey, baszty i t.d. nie można wymierzać podstawy, tylko aż do spodku iey murów; možná iednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a stąd wnieść położenie iey, środka, a zatém i długość, którą dodadź potrzeba do podstawy wymierzoney.

358. *Przysłós*: 2. Niech będzie wiadomá wysokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypádá odległość punktu położonégo na gruncie, a widzialnégo z mieysca stanowiska.

Ustawiwszy kątomierz na płaszczyznie pionowey, iak wyżey, naznaczmy kąt, który czyni perspektywa iedna w po-
X zie-

---

dziá dodáwać do wyrachowaney Trygonometrycznie wysokości: co lubo się wyraźnie kłaśdź nie będzie, samé iednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okážą.

(i) Wysokości wieży, lub iakiégo podobnégo budynku łatwo doyśdź možná, spuściwszy z góry na dół sznur, który potém zmierzony, dá poznać tę wysokość. Trzeba ie'nak mieć baczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obacz między innémi Dzieło iuž wyżey zalécone. P. de Luc. Tom. 2. §. 516.

ziémném położéniu, a drugá wykierowaná ku punktowi, którégo odległości szukámy. Zróbmy potém tę proporcyą: iak się má wstawa cała do dostyczneykąta naznaczonégo, tak się má wysokość daná do odległości szukaney.

Uwága. Można tym sposobém wyznaczyć odległość od spodku wysokości iakiéy, tylu punktów, ilé zechcémy; maiąc iuż wiadomą wysokość, z któréy wiérzchołka wyznáczać przypádá té odległości. Uważaiąc zaś, i znacząc kąty, któré zrobi perspektywa (k) kierowaná do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, iednych względém drugich.

359. *Przystós:* 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiégo od spodku wysokości, na któréy się stoi, wyznaczyć tę wysokość.

Uwá-

(k) Té kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perspektywa coráz do innégo punktu na gruncie położonégo, kierowaná, iako bardziéy płaszczyzny pionowé przechodzącé przez perspektywę za każdém celowaniém. Náywygodniéy się to działanié wykoná: gdy kątomiérz będzie miáł półkole prostopadłé do reszty narzędziá i opatrzoné perspektywą ruchomą.

Uważywszy kąt tak iak wyżey, zróbmy tę proporcyą: Jak się ma wstawa cała do styczney kąta uważonego, tak się ma odległość daná do wysokości szukaney.

360. *Przystós*: 4. Niech będzie wysokość nie dostępná, trzeba ią wyznączyć.

Sposób postępowaniá náypospoliciey używany, zawisł na tem, aby wymierzyć podstawę iaką wprost tey wysokości, którey szukamy, i naznaczyć kąty pod któremi z obudwóch końców tey podstawy, widzimy wysokość szukaną. Można stąd doyśdź, tak wysokości, iako też i odległości iey spodka, od obudwóch końców podstawy.

Niech SP wyráźá wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku tey wysokości. Wyznáczmy kąty A i B przez perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną. Táb. XXI. *Fig.* 4.

W Tróykącie ASB, zachodzi ta proporcyá.

Wst: ASB: wst: A = AB: BS.

W Tróykącie BSP, iest;

Wst. cała: wst: B = SB: SP.

Więc wst: cała × wst: ASB: wst: A × wst: B = AB: SP.

 361.

361. *Uwága* 1. Tego sposobu używaiąc, można náprzód uchybić w bräniu takiéy podstawy, któráby przedłużoná prosto prowadziła, do wysokości podanéy do wymierzéniá; ponieważ zaś w wielu przypádkach trudno iest utrafić na takié podstawy położénie; będzie więc i wysokość stąd wyrachowaná, niepewná. Powtóré, gdy podstawa AB, iest bardzo nachyloná względém linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względém kąta ASP, a zatém i podstawa AB wymierzoná iest bárdzo mała względem całéy podstawy AP: skąd także wyznaczénié wysokości PS będzie mniéy dokładné.

362. *Uwága* 2. Gdy narzędzié, którégo używámy, opatrzoné iest w półkole pionowé; to będzie służyć do daniá tak dobrégo podstawie położéniá, iakiégo tylko grunt pozwoli.

Táb. XXI. *Fig.* 5. Niech liniiá AB wyrážá iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniiá SP, niech wyrážá wysokość, któréy szukámy.

Ustawiwszy półkole pionowé tak, aby Prawidło ruchomé zmierzało ku punktowi S, a zatém, aby liniiá SP, wpadała na płaszczyznę tego półkola; uwážáymy kąt SAP na płaszczyznie pionowéy, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kąto-

kątomierza poziémnie ustawionégo. Zróbmy to samo i na drugim stanowisku, przy punkcie B.

W Tróykącie PAB, gdzie wiadomá iest podstawa, i wszystkié kąty, będzie;

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Tróykącie prostokątnym SAP, iest:

Pr: stycznéy SAP = AP: SP.

Więc Pr. × wst. ABP: wst. APB × stycz. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dlá iakiéy zawady nié można rązém brać kątów pionowych, i kątów poziémnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnáby osobno wymierzyć kąty poziémné: PAB, PBA. Z tém wszystkiém wyznaczénié tego ciągu z wielką częstokroć prácą przychodzi.

363. *Przystós:* 5. Niech będzie daná liniiá na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadomá, z któréy wierzchołka można widzieć końce téy linii danéy. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadoméy, i tęż samę wysokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyznie pionowey, zawarte między liniią pionową, albo nitką z ciężarem zawieszoną, i między perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczne kątów uważanych: (będą zaś te odległości stycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a zatem stósunek tych odległości będzie wiadomy. Uważaymy i ten kąt, który się zrobi na płaszczyznie poziemney kątomierza, przez płaszczyzny pionowe, na których znaydować się będzie perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt równy kątowi zawartemu między dwiema liniiami prowadzonemi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątem w wierzchołku Tróykąta, maiącego wiadomą podstawę i wiadomy stósunek ramion, a zatem można ten Tróykąt zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzie tak iest zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któreby od spodka wysokości prowadzone były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wszystkich tych trzech punktów odległość: wyiąwszy, gdyby dwa końce

ce podstawy, były w jednéy linii z spodkiém wysokości. (1)

PRZYDATEK II.

Piérwszé początki równowáżéniá.

W piérwszych początkach, na których się równoważenie (*libellatio*) zasádzá, można uważać ziémię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Różnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iéy figurą (spłaszczoną w końcach osi) bardzo mało wpływá w działaniá, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebné do czynieniá w rachunkach, popráw: z przyczyny nie zupełnéy ziémi okrągłości, byłyby teráz niewczesné i nad poięcie Uczniów.

364. Uważaiąc Ziémię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iéy przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem którego promień byłby ténże sám, co i promień ziémi.

---

(1) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działáń, wyrażonych w tych ostatnich przystósowaniach; tedy dlá łatwieyszégo Uczniów poięciá, można działaniá té na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.

ziémi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 ftopniów rachuiąc mil Niémieckich 15. (które się nie wiele różnią od Polskich) na ieden ftopień; cały ten okrąg zawiérać w sobie będzie mil Niémieckich 5400, a zatém śrzednica iego, to iest śrzednica ziémi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc okrągło: 1720.

Tę długość na mnieysze miary Polfkié z Niémieckich zamiéniaiąc (sposobem w Arytmetyce podanym) będzie śrzednica ziémi, więcéy cokolwiek niż.

21 000 000, łokci Polfkich.
7 000 000, sążni
2 800 000, prętów
280 000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa mieysca są do *równowági* (ad libellam,) gdy równą maią od śrzódka ziémi odległość. J tak powiérzchnia wody ftoiącéy, wszyftkié punkta ma do równowági.

Gdy liniia iaka proftopadłą ieft w punkcie powiérzchni ziémi do iéy promiénia, przez ten punkt przechodzącégo; ta liniia prócz iednégo tego punktu spolnégo z promiéniem, którégo odległość od śrzodka, równa się promiéniowi ziémi, wszyftkie inne swoié punkta, dalsze mieć będzie

dzie w rzeczy samey od śrzodka ziemi: ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, różnica położenia tey linii, okazuiącey *rownowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody stoiącey, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera), ta, mówię różnica tak iest mała, że chyba w znaczney bardzo odległości dá się postrzedz, przeto w zwyczayniejszych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Jakoż niech promień CA, wyráża promień ziemi, liniiá AB. niech wyráża styczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyráża liniią, ciągnioną przez punkt B, i przez śrzodek ziemi, spotykaiącą iey powierzchnią w punktach: D. i t.d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$: a że liniiá BD iest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$. Táb. XXI. *Fig. 6.*

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyszą od $\frac{1}{24}$ części łokcia, toiest mnieyszą od cála.

Liniiá ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatem w odległo-

ległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyszą od cala.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziémi, są bardzo małe względém wielkości całey ziémi a zatém można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele się przykładaią do odmian, które na ziémi postrzegamy. Gdyby n p. ziémia była Matematyczną kulą, toiest zupełnie okrągłą; wody wszystkie na iéy powierzchni znayduiące się byłyby stoiącémi; nie byłoby ani rzék, ani strumyków, ani zrzódeł wytryskuiących i sztuką tylko możnaby wody z jednégo mieysca na inné sprowadzać.

367. Przez działaniá równoważéniá, wyznaczaią się te nierówności, czyli różnica, która zachodzi między odległością od śrzodka ziémi, dwóch albo więcéy punktów. Przeto dochodzénie iakieykolwiek wysokości, możnaby sobie wystawić pod ogólnym tém wyobrażéniem działań równoważéniá; zwyczaynie iednak działaniá te daléy się nie rozciągaią, iak do wyznaczéniá pomnieyszych wysokości, a szczególniéy do sprowadzeniá wód z jednégo mieysca na drugie; co obszérniéy zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważéniá, używané

są

są niektóre narzędziá, służącé do wyznaczéniá linii prostéy ukázuiącéy równowágę pozorną. Tych wszystkich narzędziów opisanié, wieléby tu mieysca zabrało, (m) wyrażą się iednak potrzebnieysze.

368. Równowága wodná, iedna z náyprościéyszych, składá się z rurki mosiężnéy, albo blaszanéy, i z dwóch butelek szklanych iak náyprzezroczystszych, przy końcach téyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawartá przechodzi przez rurkę, i w równéy w obudwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzoná bywá taká równowága na nodze drewnianéy, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanié iéy na tém się zasádzá, że woda przez otwarcié iakié łączącé dwa lub więcéy naczyniá, przechodząca z iednégo do drugiégo, układá się do równowági. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, téy tu opisanéy równowági, gdy bez pomocy perspektyw, gołem

(m) Dokładné i obszérné opisanié tych narzędziów, znáyduie się w Xiążce P. Pikarda o równowáżéniu; która z wielą przydatkami wyłożoná iest z Francuzkiégo na Niémiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wielé także doczytać się można w Xiążce napisanéy w téy materyi przez P. Le Febure.

łém okiém do powiérzchni wody przystawioném, céluiémy do iakiégo mieysca.

370. Układ równowági powietrznéy zasádzá się na własności powietrza, ile lekszégo od wody. Przez tę własność, powietrzé w rurce wráz z wodą zamknięté wychodzić nad wodę musi.

Jest to ieden z náylepszych sposobów do ustawiénia, podług równowági, prawidła, albo raczey perspektywy do niego przyprawionéy.

Równowági powietrzné do wielkiéy doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisuiąc równowágę Brandera, obszernie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do Xiążki Pikarda. Robią ieszcze i równowági próżné to iest takie, z których powietrzé iest wyciągnioné.

Te równowági, za świadectwém X. Fontany, náymnieyszą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykiérowaniá linii, prawidła, lub perspektywy, podług położéniá poziémnégo, służy też i nić, która przez ciężár w końcu iéy zawieszony do pionu się układá.

Ta nić ponieważ iest prostopadłą do linii iakiéykolwiek poziémnéy, na téy więc

zasadzie robić zwykli, innégo ieszcze gatunku równowági, nazwané rownowágami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działań równoważéniá, potrzebny także ieſt pręt podzielony na łokcie, cále i t. d. na który wkłádá się znak z papiéru grubégo, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku má bydź cel wyrażony, któryby i z daleka rozeznać możná.

373. Niech będą dwa iakiékolwiek mieysca, których różność równowági trzeba znaléźć.

Poſtáwmy narzędzié, na iedném z tych mieysc, a na drugiém pręt na łokcie, cále i t. d. podzielony. Perspektywę poziémnie, czyli do równowági ústawioną kieruymy ku prętowi: do którego znak przyprawiony, má bydź przez inną osobę spuszczany, lub podnoszony póty, póki środek tego znaku nie przypadnie w linii proſtéy, którą poziémné perspektywy położénié wyznaczá. Jeżeli wysokość tego środka znaku, od spodka pręta rachowaná, będzie równá wysokości perspektywy rachowanéy od spodka nogi, na któréy cáłé narzędzié z perspektywą ieſt wsparte; tedy dwa té mieysca będą do równowági. Jeżeli zaś wysokość środka znaku będzie większá, lub mnieyszá od wysoko-

ści perspektywy; tedy spodek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodku nogi narzędzia: ila iest różnica między temi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, sążni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znacznieysze, tak z przyczyny zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, a raczey one zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzie w równey, ile bydź może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mamy. Obudwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego śrzedniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości śrzodka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iedney względem drugiey; tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którém znak niżey iest położony.

Przez

Przez to dwoiakié działanié można z iednego stanowiska równoważyć dwa iakié mieysca, których odległość zawiérałaby n. p. 300. sążni, a zatém iużby nadto wielka była, aby się w niey pierwszego do równoważénia sposobu użyć godziło.

375. Gdy mieysca do równoważénia wyznaczoné, są ieszcze odległeyszé, n. p. na iednę, lub dwie mile dalekié, iedno od drugiégo, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każda zawiérałaby około 300. sążni: a dopiéro z pośrzodka każdéy téy mnieyszey odległości, równoważyć iéy końce, czyli granice.

Przez piérwszé takowé działanié, znaydziémy różnicę piérwszégo punktu wysokości od drugiégo następuiącego. Przez drugié działanié znaydziémy różnicę wysokości tego drugiégo punktu od trzeciégo, i tak daléy, aż na koniec znaydziémy różnicę wysokości przedostatniégo punktu od ostatniégo, który kończy całą odległość, a tem samém doydziémy też i różnicy wysokości piérwszégo punktu od ostatniégo, toiest, doydziémy różnicy wysokości między iednym i drugim końcém całey odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdégo punktu podziału, do innégo iému naybliższégo, każdy ta-

ki

ki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącego, z którym się w równoważeniu porównywa: tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktem następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów kończących całą odległość. Ale ieżeli te punkta następne, są na przemiany iedne wyższe, a drugie niższe względem tych, z któremi się przy każdem działaniu porównywaią; tedy wziąźć trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdem następnem działaniu są wyższe od tych, z któremi ie porownywamy (postępuiąc zawsze od iednego końca całey odległości, do drugiego.) Trzeba ieszcze wziąźć i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdem działaniu następnem są niższe od tych, z któremi się porownywaią (w tę samę stronę co i pierwey postępuiąc:)

Jeżeli te dwie summy będą równe; znakiem to będzie, że obadwa całey odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy będą nie równe; tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mnieysza iest od drugiey.

377. Aby nie bydź obowiązanym porównywać przy każdem stanowisku, wy-

sokości dwóch punktów przypádaiących do równowáżenia; lepiey iest, że dway pomocnicy rachowáć będą wysokość znaku, i onę dla pamięci zapisywáć po każdém szczególném działániu. Jedna z tych wysokości naznaczonych, będzie służyć do porównania iey z jnną następną, która ieszcze nie iest znalezioną. Ci dway pomocnicy postępowáć będą po każdém szczególném działániu, ku drugiému końcowi cały odległości; ten, który wprzody póydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziáłu, á drugi stánie przy punkcie od pierwszego opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działániach, zbierze się wraz summa wysokości od pierwszego pomocnika naznaczonych, i podobnie w jednę summę zbiorą się wysokości naznączone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, któreśmy równowáżyć postanowili. Ten zaś punkt będzie wyższy od drugiego, któremu odpowiadaiąca summa będzie mnieyszá.

378. Co się tycze równowáżéniá mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak n. p. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach morza śrzódziemnego, od wysokości mieysc innych w śrzód Polski po-

łożonych, albo przy brzegach morza Baltyckiego; rozumiem że pewnie o tem mowa będzie w Fizyce. Można w tey mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Luc, o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącey ziemię (sur les modifications de l' Atmosphere.)

ROZDZIÁŁ XIII.

O kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła.

379. Obwody Wielokątów foremnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promienie kół w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równaią się Tróykątóm maiącym za wysokość promienie kół wpisanych, a za podstawę obwód Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty promieni kół wpisanych, i t. d. Wszystkie te Twierdzenia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są prawdziwe, chociażby naywiększa była liczba boków.

380. Stąd zdaie się, że prawdziwe będą te wszystkie Twierdzenia, gdyby nawet liczba boków tak wielka była w wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobna, i gdyby promienie

kół

kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale się iednym promieniem wydawały. (n)

381. *Twierdzénie przybrane.* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w szczególności mnieysza była, niżeli inna iakakolwiek ilość naznaczona.

(n) Takowé rozumowanié, przywiodło Geometrów, że do koła uważanégo za granicę między wielokątém wpisanym i opisanym, przystósowali té Twierdzénia, które o wielokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy pierwszém czytaniu téy Xiążki, wystawić Ucznióm koła, pod tą postacią. Jeżeli iednak przez ćwiczénia poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niéy nabyli, przeciwną rzeczą zapewné zdawać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z náywiększą liczbą boków, do koła uważanégo pod postacią wielokąta takiégo, którégo liczba boków większa byłaby od iakiéykolwiek liczby naznaczonéy. Postrzegą oni, i postrzédz powinni skok niezmierny w takowém przechodzéniu: gdyż ściśle mówiąc: liniia krzywa nie może bydź uważana, iako zbiór wielu liniy prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wyłuszczyć tak dla zabieżénia wielu trudnościóm, które w téy mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swégo i przeniknieniu nadto uprzedzéni, a ledwie w rzeczy samey pierwsze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawiénia młodzi zawczasu w dokładność Matematyczną.

Dowodz: Pomnóżmy tę drugą ilość naznaczoną, tylé razy, ilé potrzeba, aby się stała większą od piérwszéy ilości daney; na tyleż części równych podzielmy ilość piérwszą, ilé razy była pomnożoná ilość drugá: każdá takowá część ilości piérwszéy, mnieysza będzie od ilości drugiéy naznaczonéy.

W szczególności mowiąc, gdy się weźmie połowa ilości iakiey skończonéy, i téy połowy połowa, toiest czwartá część całéy ilości, i znowu téy ostatniéy połowy połowa, toiest osma część całéy ilości: daléy połowa téy osméy części, toiest, część szesnástá i t. d; doydzie się na ostatek do takiéy części, która mnieyszą będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. (o)

382. *Twiérdzenié* 1. Można opisać na kole danem i wpisać weń foremné dwa takié wielokąty podobné, aby stósunek ich obwodów przybliżał się bardziey do stósunku równości, niżeli iakikolwiek inny stósunek nierówności naznaczony.

Przy-

(o) Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów; aby zamiást słowa: *naznaczoná*, nie używali tego drugiégo słowa *naznaczyć się mogącá*, i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.

Przykład. Można wpisać w koło i na niem opisać dwa wielokąty foremne podobne, takie, którychby rożnica obwodów mnieyszą była od dziesiątey na przykład części obwodu, iednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iednę taką część wyraża. Táb.XXII *Fig. 1.*

Przez B przeciągniymy DBd. prostopadłą do promienia, i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16. i t. d. części równych, póty, póki nie doydziemy do części koła mnieyszey od łuku DAd. Niechby na przykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd: i punkt A, niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (która będzie prostopadłą do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Liniie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów foremnych podobnych, iednego w koło wpisanego, a drugiego na kole opisanego; a zatem obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak liniia AG, do linii CA. A że liniia AG mnieysza iest od linii AB, to-

iest

iest od dziesiątey części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyszá będzie, niżeli dziesiątá część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby liniiá AB była $\frac{3}{11}$ linii BC, albo $\frac{3}{11}$ linii AC, możnáby podobnym sposobem dowieśdź, że różnica dwóch obwodów, tak się má do obwodu wielokąta w koło wpisanego: iak liniiá AG do linii CG. A że AG mnieyszá iest od AB: więc tém samém mnieyszá iest od $\frac{1}{10}$ tey części linii BC, a tem bardziey mnieyszá będzie od 10tey części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyszá byłaby od 10tey części obwodu wielokąta w koło wpisanego. (p)

383. *Wniosek* 1. Możná w koło wpisać wielokąt ieden foremny, i drugi podobny na nim opisać, tak aby stósunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wielokątów bardziey był przybliżony do stó-

---

(p) Daie się tu przykład liczebny dlá łatwieyszégo poięciá. Że iednak té rozumowaniá uważané w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą bydź przystósowané do wszystkich innych; przeto dowodzénié naszé nie iest dlá tego szczególnégo przystósowaniá, ani mniéy dokładném, ani mniéy ógólném.

ſtósunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtósunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole był ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego.

Różnica obwodu wielokąta opisanego, od obwodu koła mnieyszá będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; toiest, mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ część obudwu wielokąta wpisanego, a tém bardziéy mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieyszá iest, niżeli rożnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatém mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopieróż mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią proſtą, wziętą za równą okręgowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieyszá byłaby, niżeli liniiá daná iakiéykolwiek małości.

Po-

Pomnóżmy ostatnią tę liniią tylérazy, aż większą będzie od linii wziętéy za równą okręgowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększona była ta liniiá. Wpiszmy w koło i opiszmy na niem dwa wielokąty foremné podobné, którychby różnica obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednégo z nich. Będzie zatém różnica obwodu koła od obwodu którégokolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednégo z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanégo; a dopiéróż mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ ta część okręgu koła, a ieszcze mnieyszá, niż liniiá dana wyznaczonéy małości.

385. *Twiérdz:* 2. Okręgi kół tak się maią do siebie, iak ich promienie.

Niech będą dwa koła C i c, a tych okręgi O i o, promienie zaś P i p; będzie zatém O: o = P: p.

Gdyby ta proporcyá w czém chybiała; tedy pierwszy stósunek byłby większy lub mnieyszy od drugiégo. W pierwszym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O, aby naprawić proporcyą; a zatém w obydwóch razach trzeba powiększyć iedén z okręgów dlá zrobiénia proporcyi.

Niech-

Niechby liniiá proſtá L większá była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobná) L: o = P: p.

Opiszmy na kole C wielokąt foremny, któregoby różnica obwodu, od obwodu koła, mnieyszá była, niżeli różnica L od O. Na drugiem także kole c, opiszmy wielokąt foremny podobny pierwszemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, iak promienie P. i p, kół C i c; albo iak L do o, (ponieważ miało bydź L: o = P, p.) A że obwód pierwszego wielokąta, mnieyszy ieſt niżeli L; więc i obwód drugiego, mnieyſzyby bydź powinien niżeli o, toiest mnieyszy niżeli okrąg koła, na którym iest opisany: co bydź nie może.

Więc ſtósunek promieni dwóch kół, nie iest większy ani mnieyszy do stosunku ich okręgów: a zatem równy iest temuż stósunkowi.

386. *Wniosek* 1. Jdzie zatém, że stósunek okręgu koła iednego, do swégo promiénia tenże sám iest, co i stósunek którégokolwiek innégo koła, do swego także promiénia.

Przeto gdyby można znaléźć stósunek iakiégokolwiek koła, do iego promiénia, iuż tém samém byłby znaleziony stósunek każdégo innégo koła do swégo promiénia. 387.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątne Tróykąty są do siebie podobne, gdy maią za wysokości, promienie dwóch kół, a za podstawy linije wzięte za równe okręgóm tychże kół: a zatem takie dwa Tróykąty będą do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promieni dwóch kół.

388. *Twierdz.* 3. Powierzchniá koła równá się powierzchni Tróykąta, maiącego za wysokość promień tego koła, a za podstawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby ten Tróykąt nie był równy powierzchni koła; byłby od niey większy, albo mnieyszy: a zatem koło byłoby równe innemu Tróykątowi teyże samey wysokości, za podstawę zaś maiącemu liniią większą, albo mnieyszą od okręgu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O. a tę liniią, większą albo mnieyszą od okręgu nazwiymy L.

W pierwszym razie, w którym ta liniiá L, większa byłaby od okręgu koła, opiszmy na nim wielokąt foremny, którego obwod mnieyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego liniiá L: a zatem liniiá L, większáby była od obwodu wielokąta. Powierzchniá tego wielokąta byłaby mnieyszá od powierzchni Tróy-
kąta

kąta maiącego za wysokość promień koła, a za podstawę, liniią L, toiest byłaby taż powierzchniá wielokąta, mnieyszá od powierzchni koła, na którém wielokąt iest opisany; co bydź nie może.

W drugim razie, w którym liniiá L, mnieyszá byłaby; od okręgu koła, wpiszmy w koło wielokąt foremny, którego obwód mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli liniiá L, a zatém obwód wielokąta byłby większy od lini L. Wpiszmy w to samo koło wielokąt inny foremny, tylé dwoie, co pierwszy boków zawieraiący.

Powiérzchniá tego drugiégo wielokąta, równałaby się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień koła, a za podstawę obwód piérwszego wielokąta: (268) toiest liniią większą od L.

A zatém powiérzchniá tego wielokąta wpisanégo w koło, większá byłaby niżeli powiérzchniá koła: co bydź także nié może.

Więc powiérzchniá koła, ani iest większá, ani mnieyszá od powiérzchni Tróykąta maiącégo za wysokość promień tego koła, a za podstawę iego okrąg; á zatém równá iest powiérzchni tego Tróykąta.

389. *Wniosek* 1. Powierzchnie kół są do siebie w stósunku dwumnożnym ich promieni, albo średnic: przeto, gdyby promienie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wniosek* 2. Powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni wielokąta na nim opisanego; iak okrąg koła do obwodu wielokąta. A w szczególności powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni kwadratu na nim opisanego, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu średnicy, iak się ma okrąg koła do obwodu tego kwadratu: toiest, iak się ma okrąg koła, do swoiey średnicy cztery razy wziętey, czyli do linii tak długiey, iak cztery średnice.

Stąd porownanie dokładne powierzchni koła, z powierzchnią kwadratu, a zatem i porównanie koła z powierzchnią iakieykolwiek figury prostokréślney, zawisło od porównania okręgu koła z linią iaką prostą: albo, (co na iedno wychodzi) *kwadrowanie* koła, zawisło od *wyprostowania* iego okręgu, czyli od wynaleziénia linii prostey równey okręgowi koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżey podawały, do zrobienia kwadratu równego

sum-

summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększénia lub zmnieyszénia kwadratu w danym stósunku, mogą bydź równie i do kół przystósowané, czyniąc na ich promiéniach lub śrzednicach, té samé działania, któréby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na którychby podobné odmiany czynić przypadało.

A w szczególności, chcąc podzielić powiérzchnią koła danégo, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrzodkowé* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień iego na tyléż części równych, zacząwszy od śrzodka, tak, aby odległości punktów podziału coráz dalszych od tegoż śrzodka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby n. p. przypádało podzielić koło na 7. części równych przez koła spółśrzodkowé. Podzielmy promień na 7. części równych: śrzednie Geometryczné między odległościami punktów podziału od śrzodka, i całym promiéniem, będą promieniami kół spółśrzodkowych, przez które podzieloná będzie powiérzchnia koła danégo, na 7. części równych.

392. Wyznaczénié powiérzchni wycinków, i odcinków kół, zawisło także od wyznaczenia okręgu koła. Jakoż w samey rzeczy.

1.

1. Powierzchnia wycinka tak się ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy: iak się ma łuk wycinka, do okręgu koła: toiest, iak się ma Tróykąt, którego wysokością iest promień a podstawą ten łuk, do Tróykąta maiącego za wysokość tenże promień, a za podstawę okrąg koła. A że ten ostatni Tróykąt byłby równy powierzchni koła; więc i pierwszy Tróykąt równy iest powierzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyszy od półkola, ieſt różnicą między wycinkiem maiącym tenże sam łuk, co i odcinek, i między Tróykątem równoramiennym, maiącym spólną z wycinkiem podstawę, wierzchołek zaś w śrzodku koła.

A że powierzchnia wycinka, równa się Tróykątowi, maiącemu za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka: a powierzchnia Tróykąta, o którym mowa (wziąwszy w nim za podstawę ieden z promieni, toiest z ramion iego, a za wysokość wstawę łuku, należącego do wycinka), równa się Tróykątowi, maiącemu za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powierzchnia odcinka mnieyszego od półkola równać się będzie Tróykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia

wy-

wyrażá się rozmnożeniem liczby oznáczaiącéy połowę promienia, przez inną liczbę oznáczaiącą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powiérzchniá odcinka większégo od półkola, iest summą z wycinka zawiéraiącégo między swémi ramionami tén sám łuk, większy od półkola, i Tróykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiém pierwszym okrąg cały; a zatém powiérzchniá tego odcinka, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promień, a za podstawę summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniem iest piérwszégo łuku do całégo okręgu, albo, (co na iedno wychodzi), z wstawy różnicy między łukiém odcinka, i półokręgiem.

393. *Defin:* W kołach nieiednakowégo promienia, wycinki i odcinki podobné, té są, których łuki są do siebie podobné, toiest, równą stopniów liczbę w sobie zamykaią: a té łuki tak się maią do siebie, iak całé okręgi, a zatém iak promienie tychże kół.

394. *Twierdz:* 4. Wycinki i odcinki podobné w kołach nie iednakowégo promienia, tak się maią do siebie; iak koła, do których należą.

Tab. XXII. Fig. 2. 1. Niech będą dwa wycinki podobne ABCDA, abcda, te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinek ACBDA, tak się ma do koła, do którego należy; iak łuk ADB, do okręgu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okręgu adbda, toiest, iak wycinek acbda, do koła, do którego należy. Więc te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, toiest w stósunku dwumnożnym promieni tychże kół.

Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobne, te dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinki ACBDA, acbda, maią się do siebie w stósunku dwumnożnym promieni CA, ca, toiest, iak CA^2, do ca^2. Tróykąty podobne: ACBA, acba, w tymże samym ieden do drugiego są stósunku; więc te dwa wycinki tenże sam do siebie maią stósunek, co i te dwa Tróykąty. Więc różnica (albo summa) pierwszego wycinka, i pierwszego Tróykąta, toiest odcinek ABDA, tak się ma do różnicy (albo do summy) drugiego wycinka i drugiego Tróykąta, toiest do odcinka abda, iak się ma pierwszy wycinek do drugiego: toiest, w stó-

sun-

sunku dwumnożnym promieni kół, do których te odcinki należą.

395. *Defin:* Niech będą dwa koła spółśrzodkowe, mieysce zawarte między ich okręgami, nazywa się *Koroną.*

396. *Twierdz: 5.* Powierzchnia iedney takiey korony równa iest prostokątowi maiącemu wysokość równą szerokości tey korony, a podstawę równą okręgowi koła, którego promień równałby się połowie summy promieni okręgów dwóch, koronę tę zawieraiących.

Niech będą CA, CB, promienie dwóch kół spółśrzodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F: liniia CF, będzie połową summy dwóch promieni CA, CB należących do dwóch kół spółśrzodkowych: korona zawarta między temi kołami, równa iest prostokątowi maiącemu szerokość AB tey korony za wysokość, a za podstawę okrąg, którego liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD prostopadłą do AC, i daymy, że AD równa się okręgowi którego promieniem iest CA. Złączmy punkta C, i D, liniią CD, a przez punkta B i F, pociągniymy dwie linije równoodległe od AD, aż do ich spotkania się z liniią CD, w punktach E, i G. Táb. XXII. Fig. 3.

Ponieważ CA: CB=AD: BE
i CA: CB=okrąg CA:okręgu CB.
więc - AD: BE=okrąg CA:okręgu CB.

A że AD wzięta iest za liniią równą

okręgowi, którégo CA iest promieniém; więc i BE=okręgowi CB.

Podobnym sposobém dowiéść mozná, że liniiá FG, równá iest okręgowi, którégo promieniém byłaby liniiá CF.

Powiérzchnie kół, których promieniami są CA, i CB, równaią się Tróykątóm, CAD, i CBE; a zatém powiérzchniá korony równá będzie czworokątowi ABED. Przez G poprowádźmy równoodległą od AB, któráby spotkała AD w H, a BE w J; Tróykąty prostokątné GDH, GEJ, maią boki GH, GJ równé, i kąty równé, więc mogą przystać do siebie: a zatém summa z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GEI, toiest Prostokąt ABIH równá się summie z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GDH, toiest, równá się czworokątowi BEDA. A że tén czworokąt równy iest powiérzchni korony; więc taż korona równá będzie prostokątowi ABIH, toiest prostokątowi, który má szérokość korony za wysokość, a za podstawę okrąg, w którym, promieniém iest śrzedniá arytmetycznie proporcyonalná, między dwoma promieniami, czyli połowa summy tychże dwóch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach spółśrzodkowych, wycinków dwóch, zawartych między témiż samémi promieniami, równá się Prostokątowi maiącému za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę łuk podobny łukóm wycinków dwóch

dwóch danych, i należący do okręgu, którégo promień, iest śrzednim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycinków.

1. Pokázáwszy, iż skwadrowanié koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania iego okręgu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanié to, aż nazbyt wsławioné, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Geometrów, którym ledwie początki Matematyki były znaiomé, a i zadania nawet samégo nie rozumieli. W czém było omylné ich rozumienié; bawić się nad tém, nie sądzę bydź rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszernieyszą w téy mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historyi o dochodzéniu kwadrowania koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tém zawisła, aby wynaléźć linią prostą równą okręgowi koła podanégo. Nie rozumié się tu zaś równość pozorná, i zmysłowá (iak ci mniemaią, którzy koło z drewna lub z kruszcu wyrobioné tocząc po iakiéy płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo, którzy koło iakié nicią okręcaią, i biorą potém długość téy nici, albo na koniec, którzy ważą takowé koło, i oné porównywaią z kwadratém podobnéy materyi i iednakowéy z kołem grubości: ale się rozumié ró-

równość umysłowá, czyli taká, o którey możnáby się przeświádczyć przez rozumowaniá podobné tym, iakich używaliśmy do dowiedzéniá práwd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lát blizko przed Narodzéniém Chrystusa, znalázł stósunek okręgu do śrzednicy, tak blizki práwdziwému, że we zwyczaynych zdarzéniach iest dostatecznym, a przytém, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczywszy śrzednicę koła przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$. a mnieyszy niż $3\frac{10}{70}$ albo, że wyraziwszy długość śrzednicy przez 497. okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybiénié zatém byłoby náywięcey w części $\frac{1}{1561}$ całégo okręgu; a którégokolwiek ze dwóch stósunków używszy, n. p. ostatniégo, tén wypádłby na stósunek 7 do 22.

Poźniey po Archimedesie, wynaleziono sposoby krótszé, którémi dochodzi się stósunków bardziey ieszcze zbliżonych do práwdziwych. Do tey nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy śrzednice koła przez 1, z zerami 127 przydanémi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożoney z tyluż znaków liczebnych, z uchybiéniém mnieyszém od iedności ostatniégo, a náymniey wyrażaiącégo znaku teyże liczby. Sposób iednak dochodzéniá z tą dokładnością ważności okręgu koła,

nié

nié może bydź w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczymy iednak stósunki niektóre wygodnieysze śrzednicy koła do okręgu, wyięte z Xięgi sławnego *P. Huyghens* o wynalazkach wielkości koła (*de circuli magnitudine inventa.*) Używaiąc Dwunastokąta wpisanego w koło, i na kole opisanego, można wynaleźć dokładnieysze stósunki śrzednicy koła do okręgu, niżeli té których doszedł *Archimedes* przez wielokąty o 96 bokach, wpisané w koło, i na nim opisané; ale na to mieysce rachunek *Archimedesa* mniéy wyciągá poprzedzaiących podáń, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stósunki śrzednicy do okręgu koła przybliżoné do práwdziwych są następuiące.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponieważ stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy iego, tén sám iest, co stósunek okręgu koła do śrzednicy cztéry razy wzięté; więc stósunki powiérzchni koła do kwadratu śrzednicy będą następuiące.

(q) Napisáwszy trzy piérwszé nieparzysté liczby 1.3.5. po dwa razy, iednę przy drugiéy, tak: 113355 liczba 113, zawiéraiącá trzy piérwszé znaki, wyrážać będzie śrzednicę; liczba zaś 355. zawiéraiącá trzy ostatnié znaki, wyrazi z małém uchybiéniém okrąg koła.

22 do 28, albo, 11, do 14.
314 do 400, albo, 157, do 200.
333 do 424.
355 do 452

Czyniąc przybliżénia dokładnieysze, lecz bardziéy zawiłe, i używaiąc sposobów krótszych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiéra w sobie śrzednicę, razy 3,141 592 653 $\frac{5}{6}$+

Skąd wynika stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy, albo stósunek okręgu koła do śrzednicy iego, cztéry razy wziętéy, równy stósunkowi 3,145 926 53 $\frac{5}{6}$+ do 4, albo 3 141 592 653 $\frac{5}{6}$+ do 4 000 000 000 0.

Z cztérech po wyżéy wyrażonych stósunków śrzednicy do okręgu koła; piérwszy daie okrąg koła większy razy

	3,142 8 + od śrzednicy,
drugi	3,140 0.
trzeci	3,141 509, +
czwarty	3,141 529 92 +

Widzimy tu, iż stósunek piérwszy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie tén okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nadto wielki; trzeci iednak i czwarty stósunek dokładnieyszy iest od dwóch piérwszych, a zwłaszcza czwarty, który ieszcze w miliionowych cząstkach daie okrąg koła nie rożniący się od ważności

żności iego wyżéy podanéy (r) a iak náyściśléy wyrachowanéy.

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżénié, następuiącé zagadnienia.

1. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego okrąg.
2. Maiąc dany okrąg koła, znaléźć iego śrzednicę.
3. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego powierzchnią.
4. Maiąc daną powiérzchnią koła, znaléźć iego śrzednicę.
5. Znaléźć bok kwadratu równégo kołu danému.

Znáyduiémy, iż stósunek śrzednicy koła do boku kwadratu równégo tému kołu, iest, 200000, do $177245/6 \pm$

Tén stósunek przybliżá się bardzo do stósunków następuiących - - - - - - - - - 35 do 31.
44 do 39.
123 do 109.
157 do 148. 6.

(r) W drugiéy Xiędze *Pamiętników* (Memoires) Matematycznych P. Lamberta, znáyduie się wybornà *Rozprawa* (*Dissertatio*) o kwadrowaniu koła. Dowodzi tam (§. 9.) Autor, że ieżeli możnáby wyznaczyć stósunek dokładny, okręgu koła do śrzednicy iego, tedy liczby, któréby go wyrážały, większéby bydź powinny od następuiących, które tén stósunek przybliżony wyrážaią, toiest: 101 951 448 6099146. do 324 511 540 032 945.

6. Maiąc dany promień koła, i wáżność kątową łuku, (toiest w stópniach) znaléźć długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną tému łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i wáżność kątową łuku, znaléźć odcinek między tym łukiém i cięciwą iego.

Náyłatwiéy i náyprościéy rozwiążémy to ostatnié zagádnienié, gdy w Tróykącié, który iest różnicą między wycinkiém i odcinkiém wspieraiącym się na tymże samym łuku, weźmiémy za podstawę ieden z promieni, a za wysokość wstawę łuku danego: maiąc albowiém tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni odcinka (mnieyszégo od półkola) iak się ma okręg cały do różnicy między łukiém odcinka, i wstawą tego koła; i ułożywszy sobie táblicę łuku, podług promienia táblic Trygonometrycznych, łatwo przyydzie rozwiązać to zagadnienié. (s)

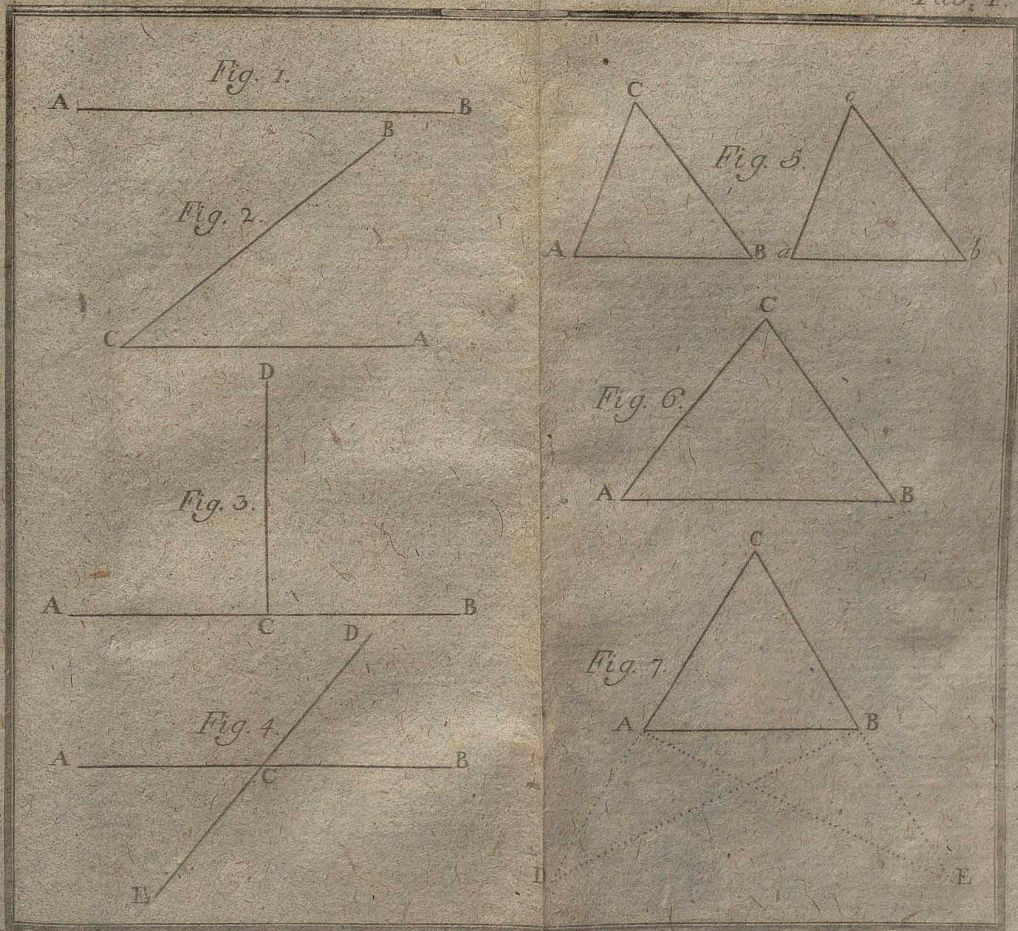
8. Znaléźć przez przybliżénié wáżność kątową łuku równaiącégo się promieniowi koła.

Przystosowanié tego zagádnieniá często bywá używané w wyższych częściach Matematyki.

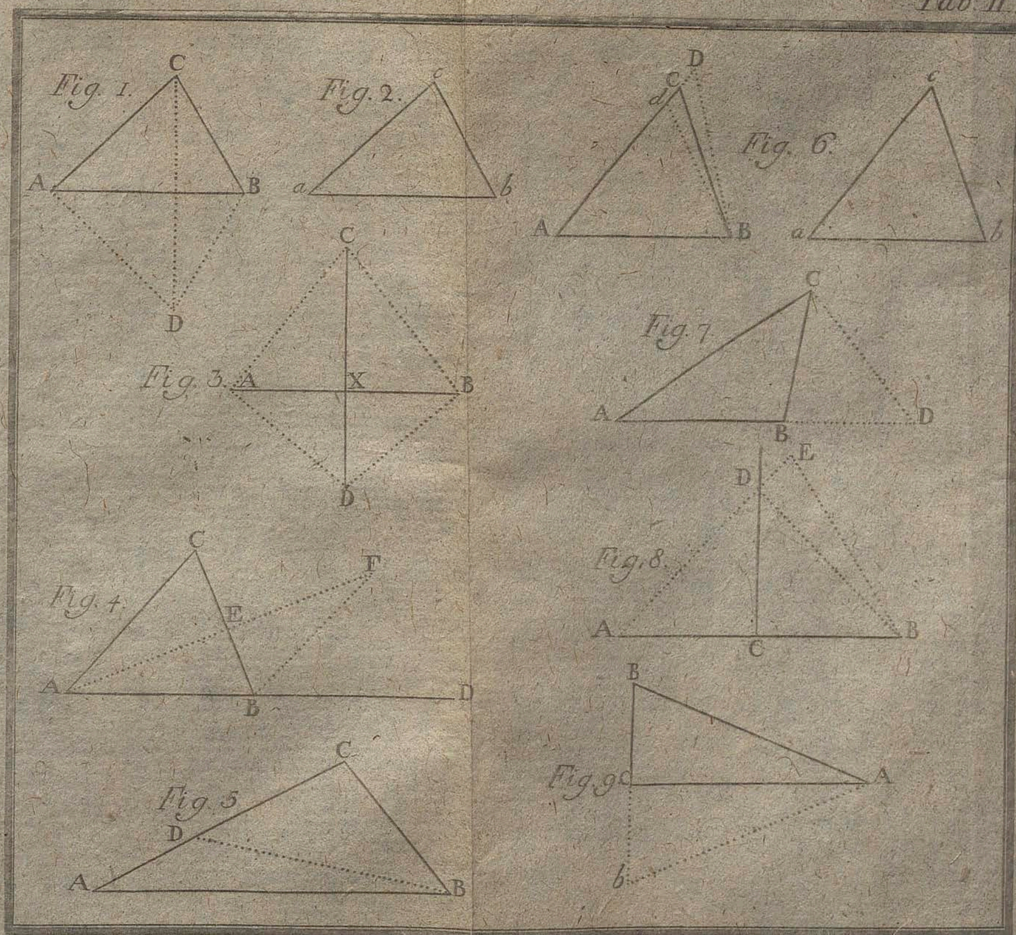
(s) Co się tycze sposobu ułożéniá takowych táblic, obácz przykłady dané w Arytmetyce.



Tab. I.


Fig. 1.
A B
Fig. 2.
B C A
Fig. 3.
D A C B
Fig. 4.
D A C B E
Fig. 5.
C A B
c a b
Fig. 6.
C A B
Fig. 7.
C A B D E

Tab. II.



Tab. III.

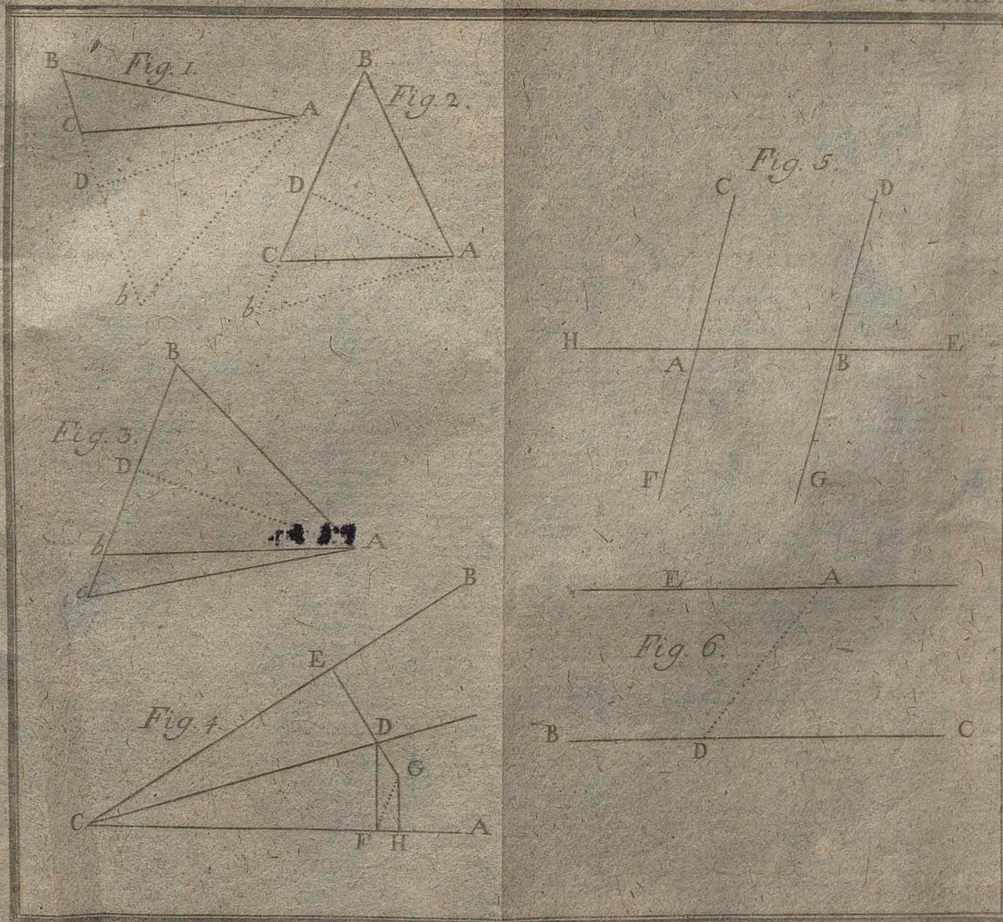
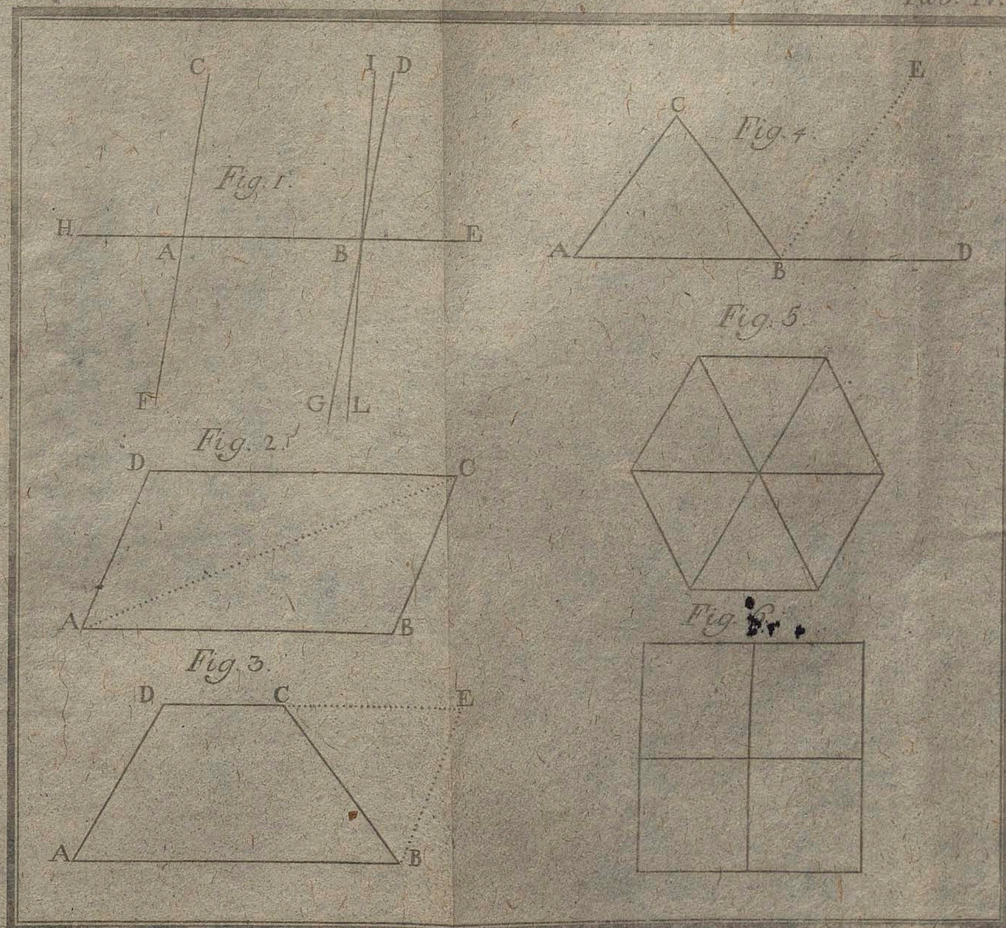
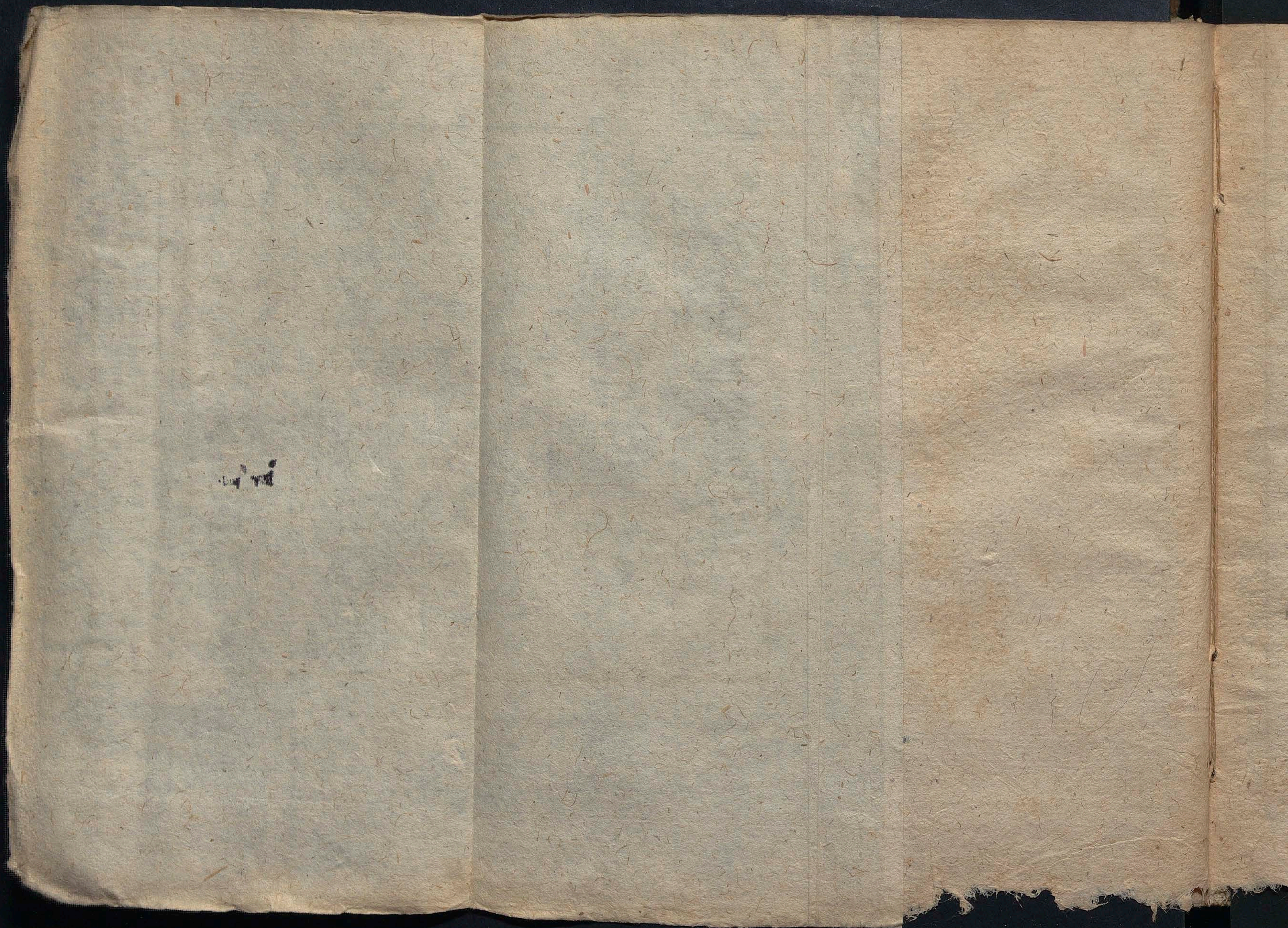


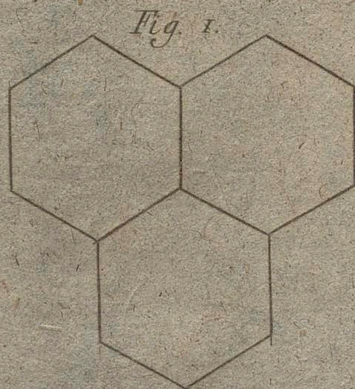
Fig. 1.
B
C
A
D
b
Fig. 2.
B
D
C
A
b
Fig. 3.
B
D
b
A
d
Fig. 4.
B
E
D
G
C
F
H
A
Fig. 5.
C
D
H
A
B
E
F
G
E
A
Fig. 6.
B
D
C

Tab. IV.





Tab. V.


Fig. 1.

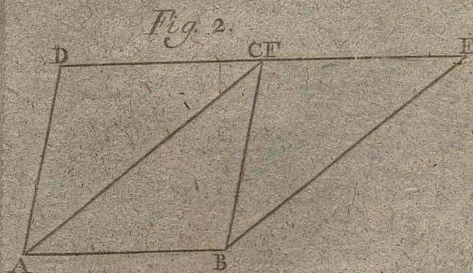


Fig. 2.

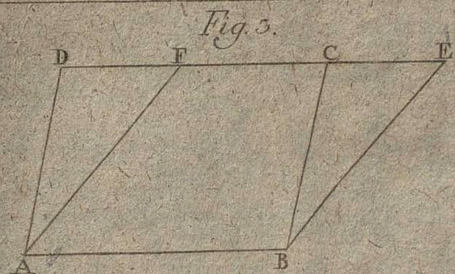


Fig. 3.

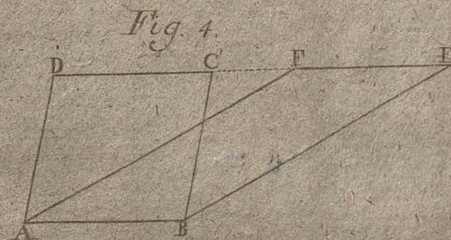


Fig. 4.

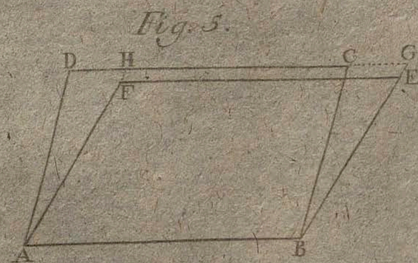
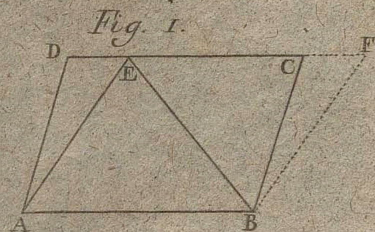
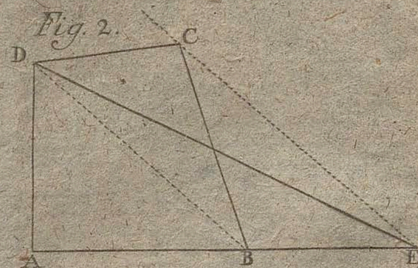
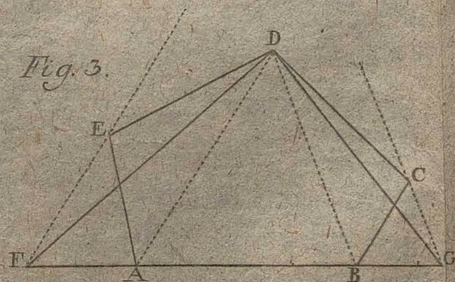


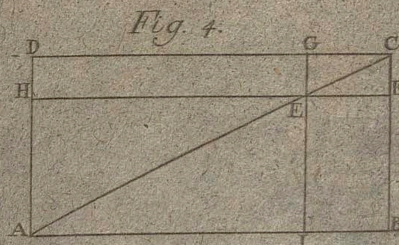
Fig. 5.

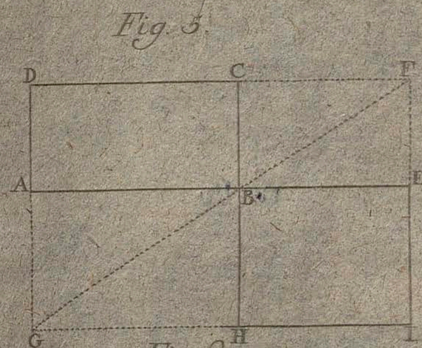
Tab. VI.

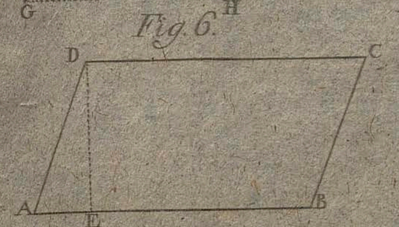

Fig. 1.
D
E
C
F
A
B


Fig. 2.
D
C
A
B
E


Fig. 3.
D
E
C
F
A
B
G


Fig. 4.
D
G
C
H
F
E
A
I
B


Fig. 5.
D
C
F
A
B
E
G
H
I


Fig. 6.
D
C
A
E
B

Tab. VIII.

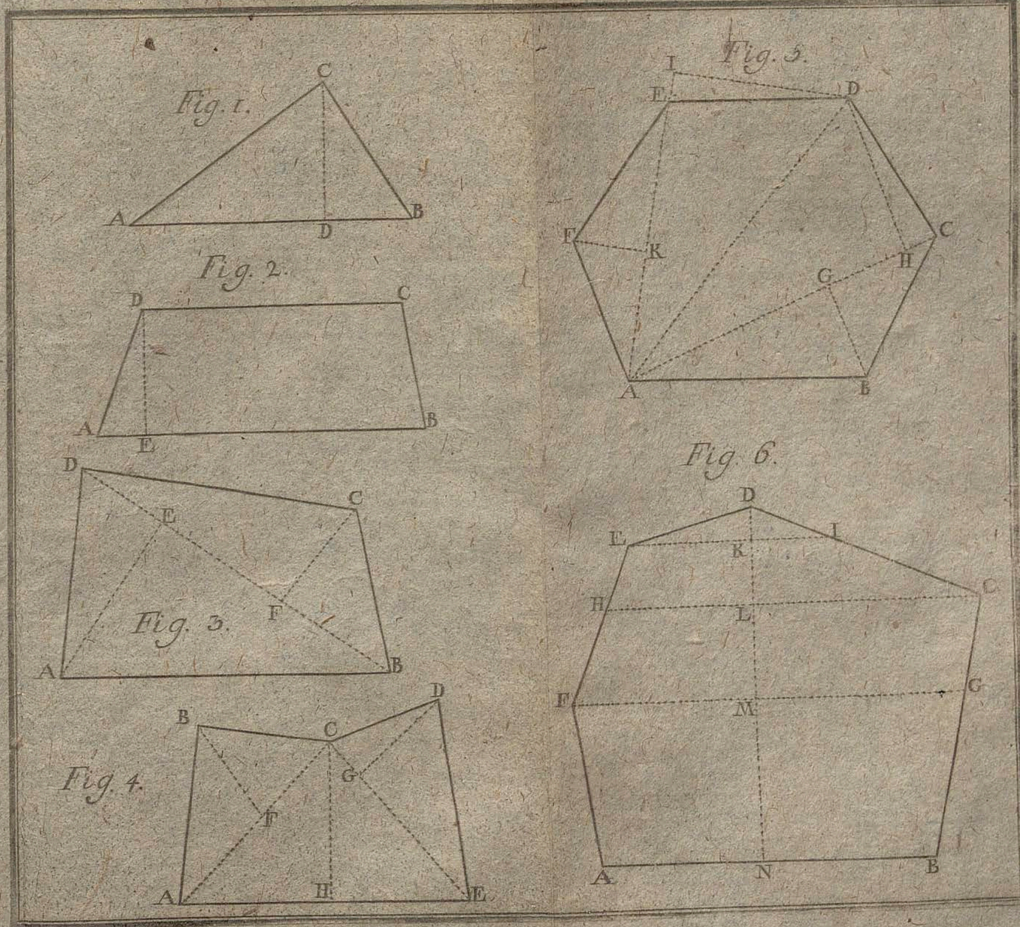
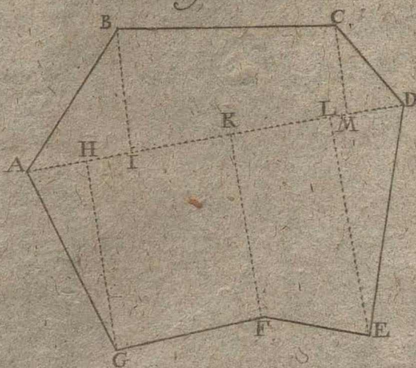
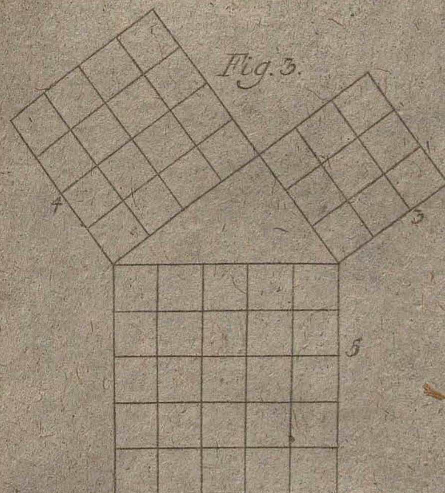
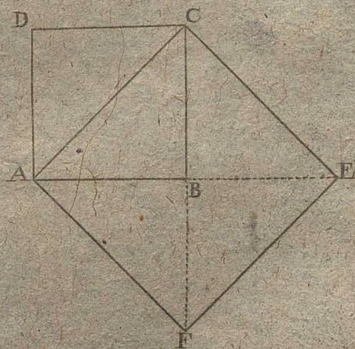
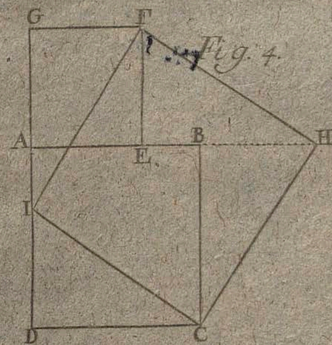


Fig. 1.
A B C D
Fig. 2.
A B C D E
Fig. 3.
A B C D E F
Fig. 4.
A B C D E F G H
Fig. 5.
A B C D E F G H I K
Fig. 6.
A B C D E F G H I K L M N


Fig. 1.
B
C
D
A
H
I
K
L
M
G
F
E


Fig. 3.
4
3
5


Fig. 2.
D
C
A
B
E
F


Fig. 4.
G
F
A
B
H
E
I
D
C

Tab. II.

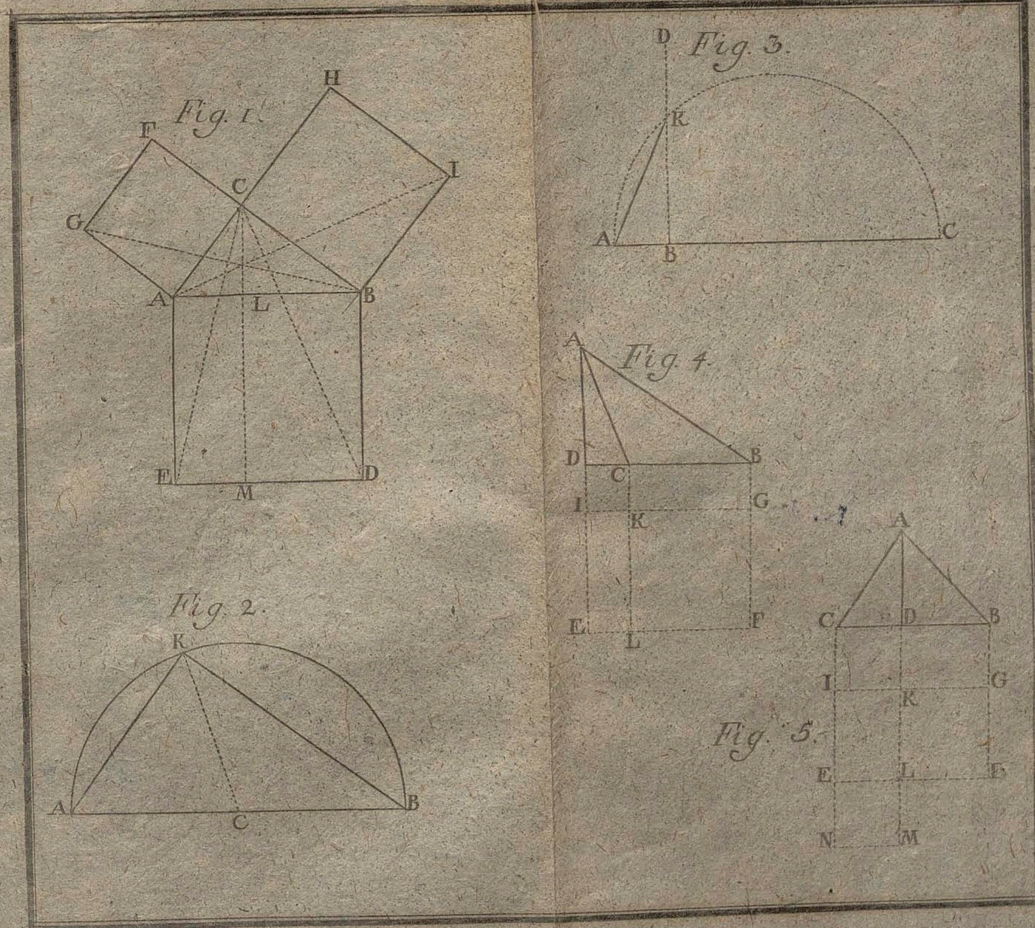
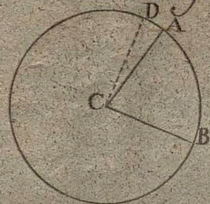


Fig. 1.
H
F
C
I
G
A
L
B
E
M
D
Fig. 2.
K
A
C
B
Fig. 3.
D
K
A
B
C
Fig. 4.
A
D
C
B
I
K
G
E
L
F
A
C
D
B
I
G
K
Fig. 5.
E
L
F
N
M

Tab. I.



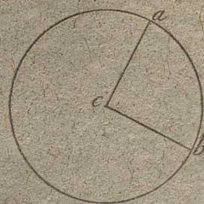


Fig. 1.

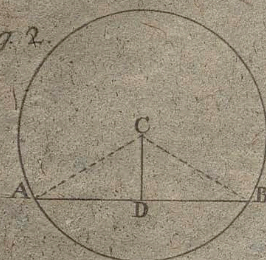


Fig. 2.

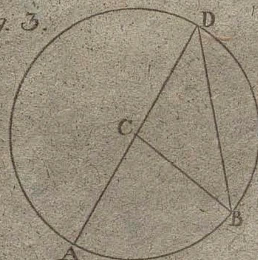


Fig. 3.

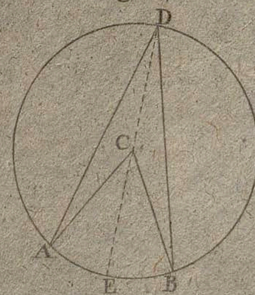


Fig. 4.

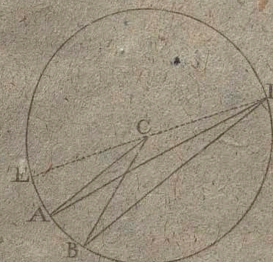


Fig. 5.

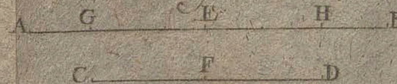
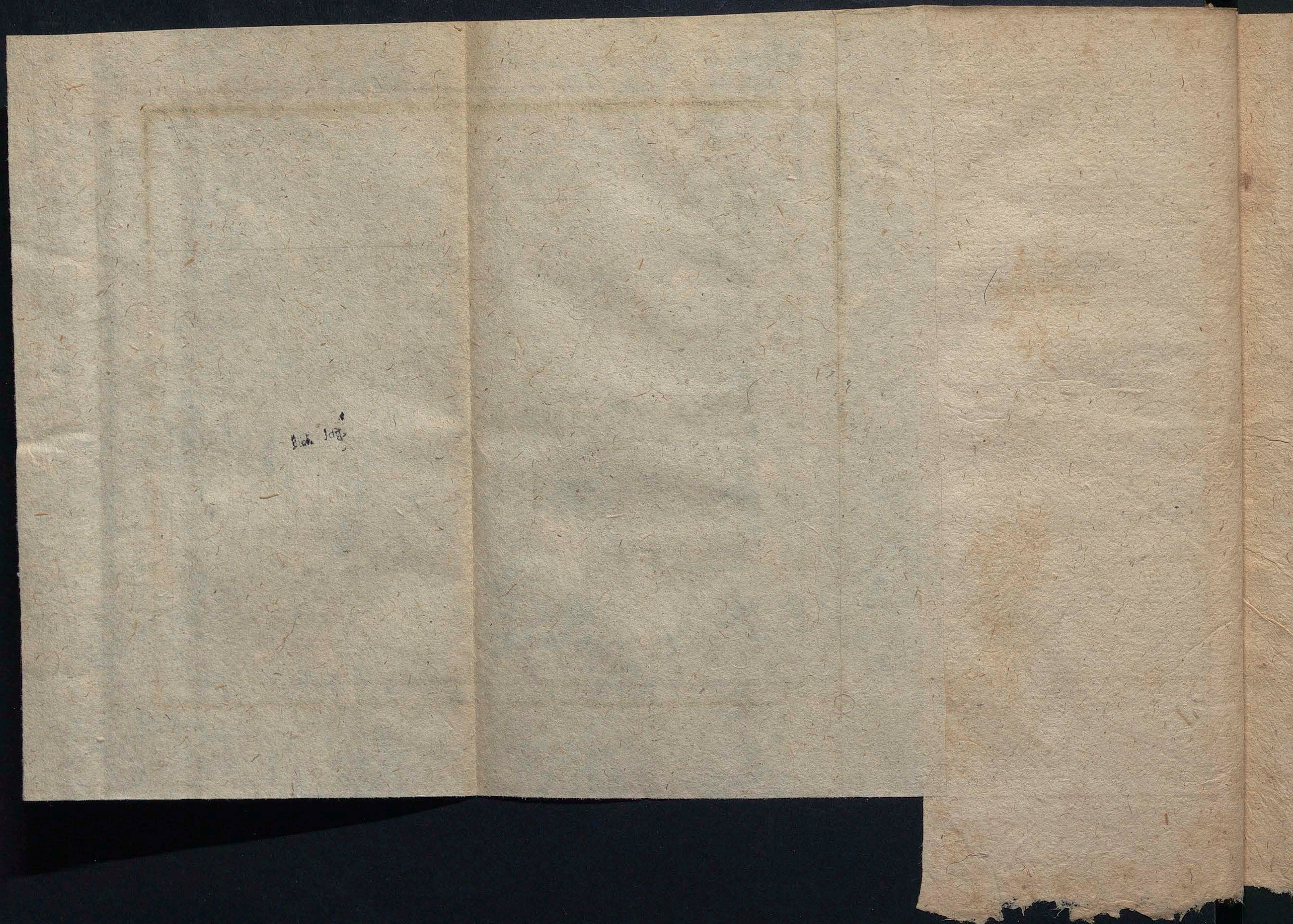


Fig. 6.



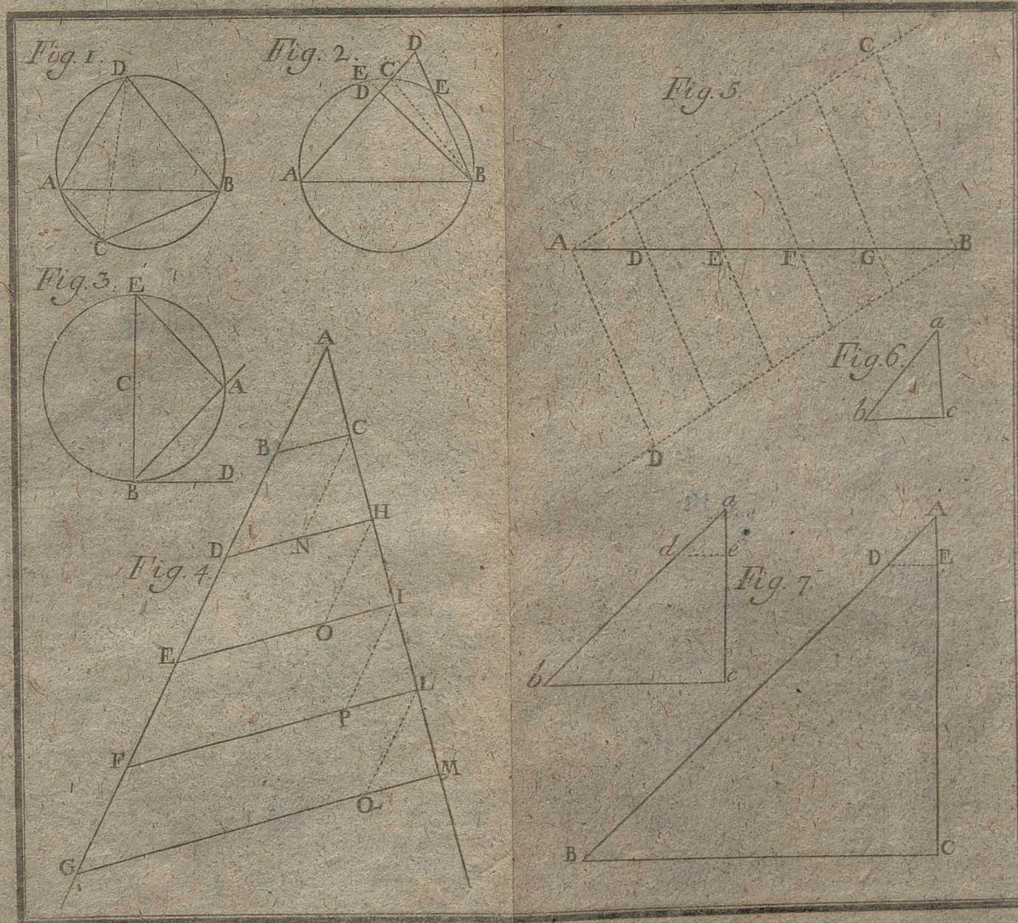


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

Tab. III

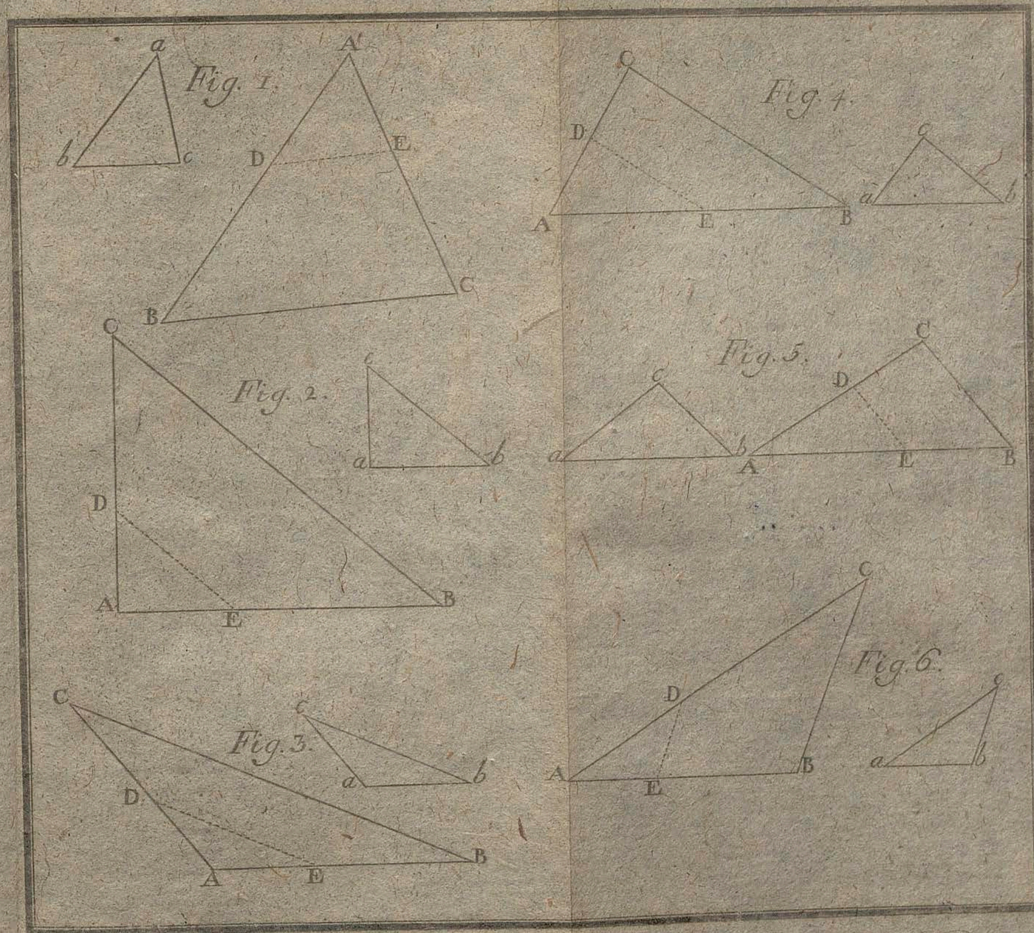
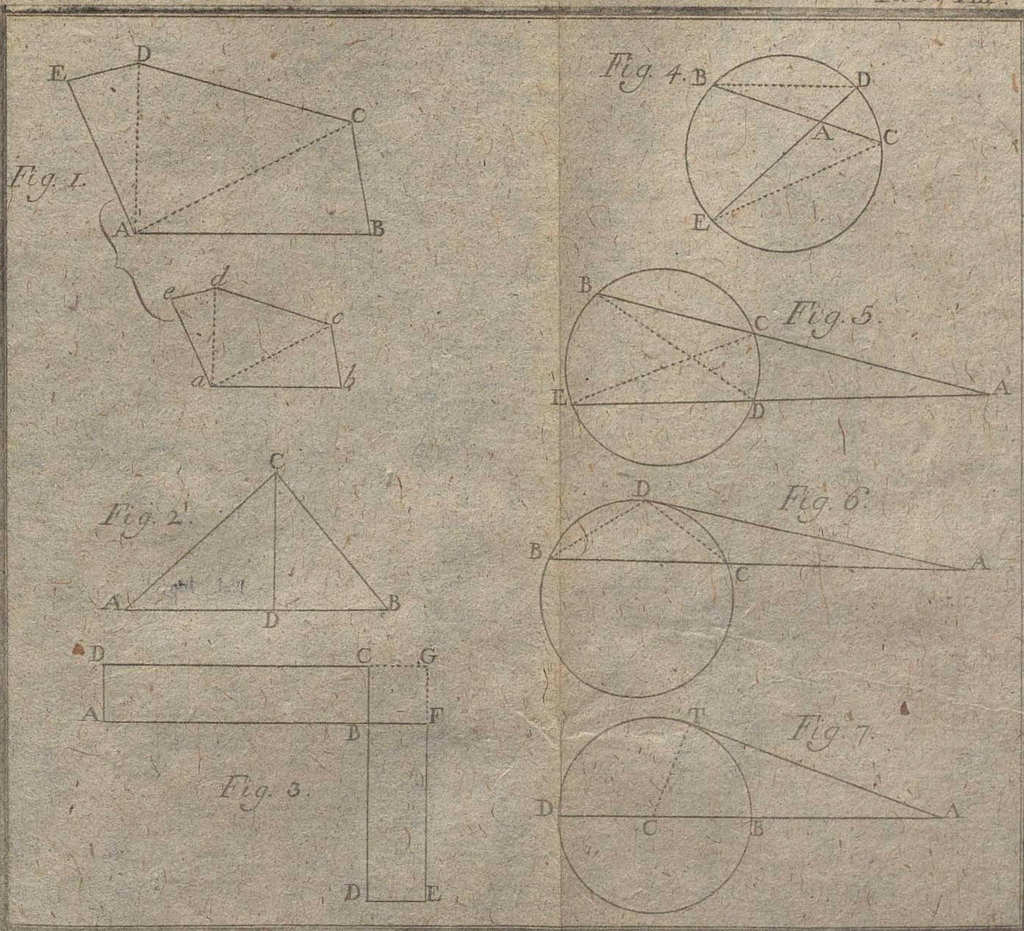
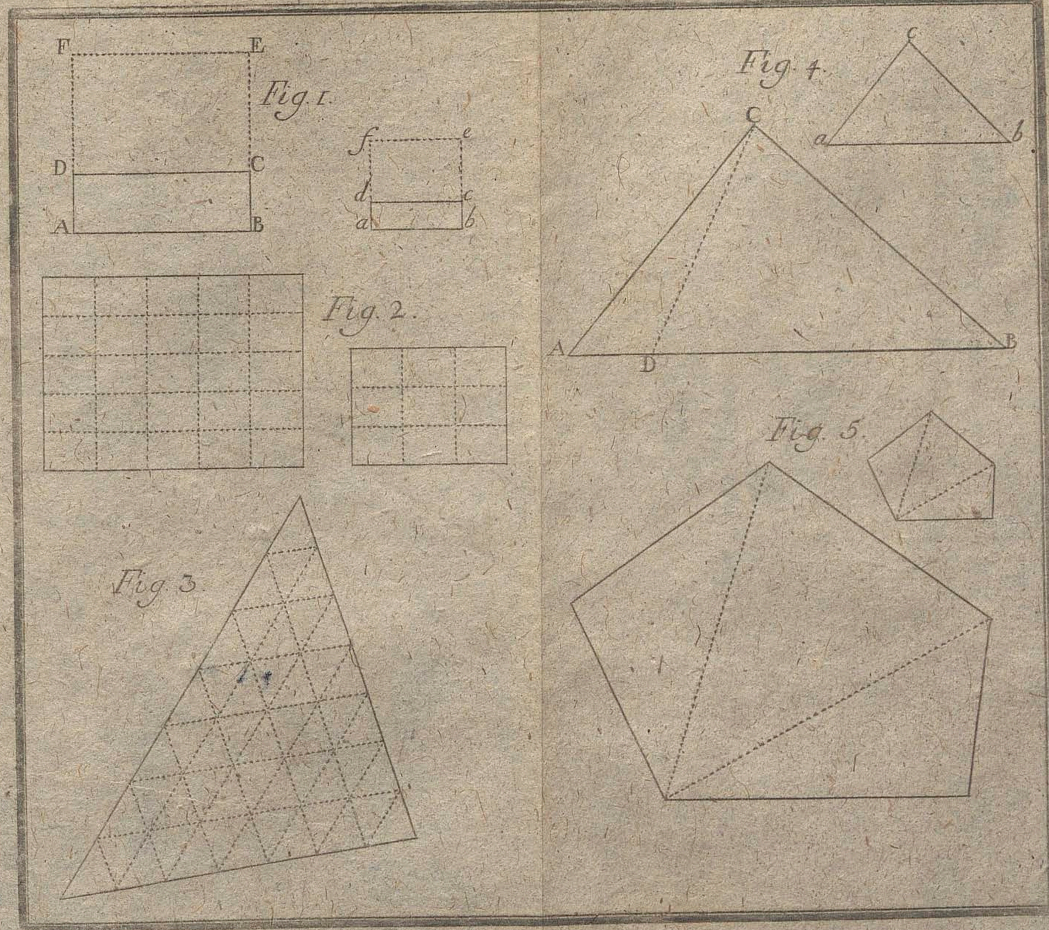


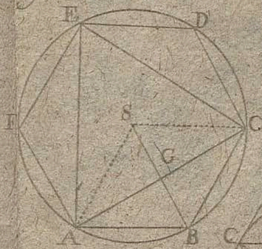
Fig. 1.
a
b
c
A
D
E
B
C
Fig. 2.
C
c
D
A
E
B
a
b
Fig. 3.
C
c
D
A
E
B
a
b
Fig. 4.
C
D
A
E
B
c
a
b
Fig. 5.
c
C
D
a
b
A
E
B
C
Fig. 6.
D
A
E
B
c
a
b

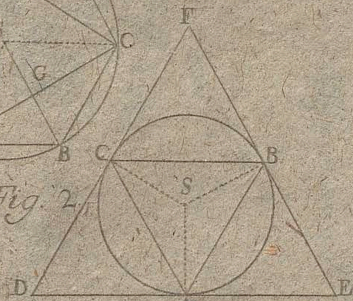

Fig. 1.
E D C A B
e d c a b
Fig. 2.
C A D B
D C G A B F
Fig. 3.
D E
Fig. 4.
B D A C E
Fig. 5.
B C E D A
Fig. 6.
D B C A
Fig. 7.
T D C B A

Pinl. Jdg.


Fig. 1.
F
E
D
C
A
B
f
e
d
c
a
b
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
C
a
b
A
D
B
Fig. 5.

Tab. IV.


Fig. 1.
E
D
F
S
C
G
A
B


F
C
B
S
Fig. 2.
D
A
E

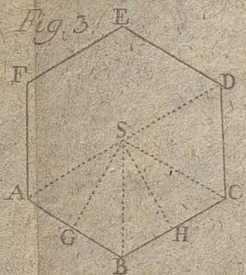

Fig. 3.
E
F
D
S
A
C
G
H
B


Fig. 4
C
D
A
B

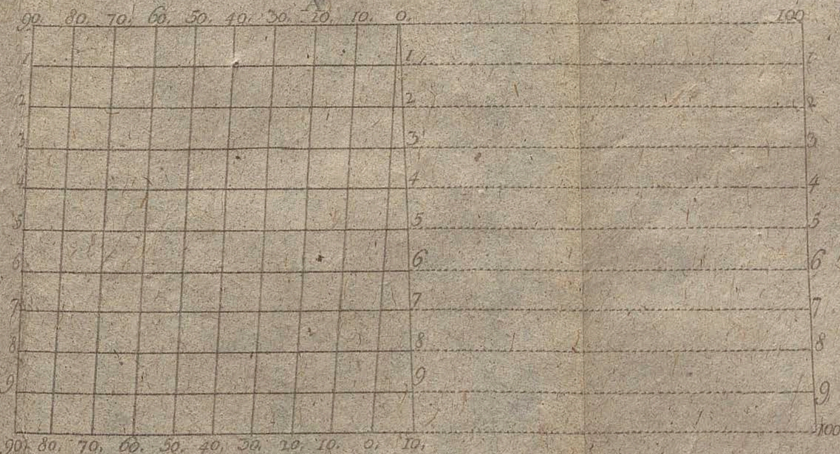
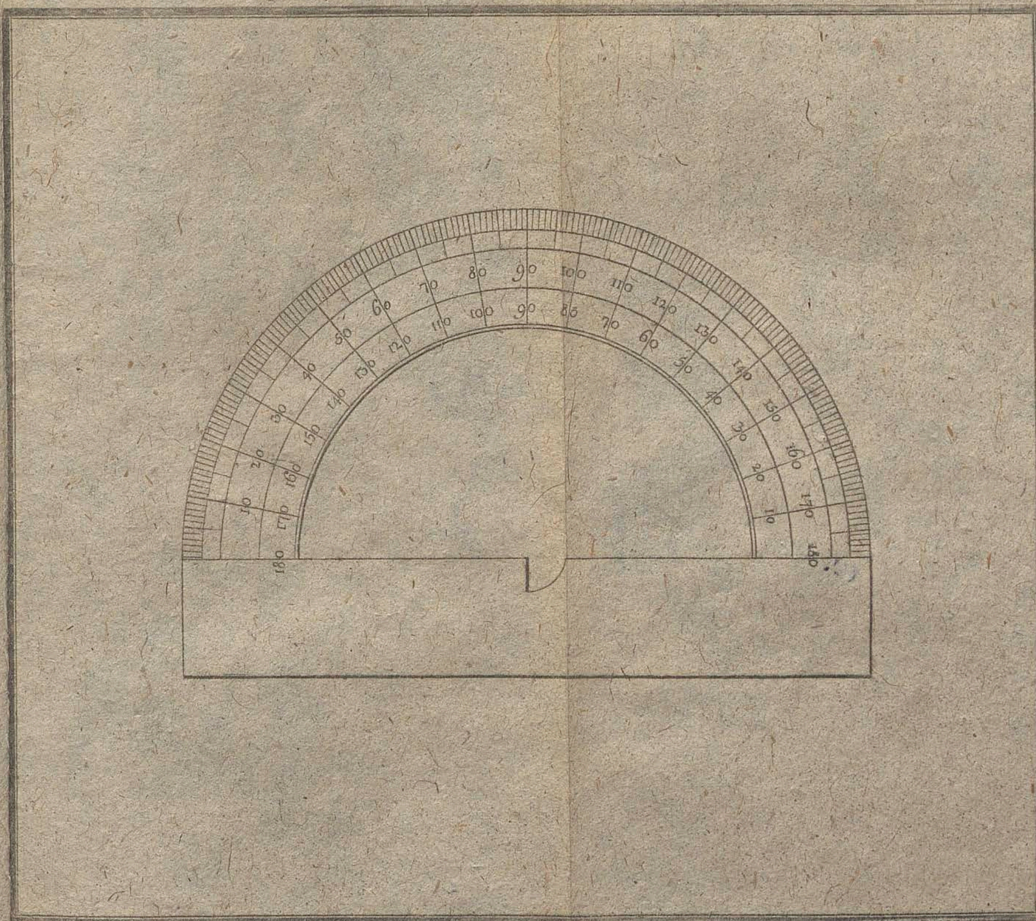
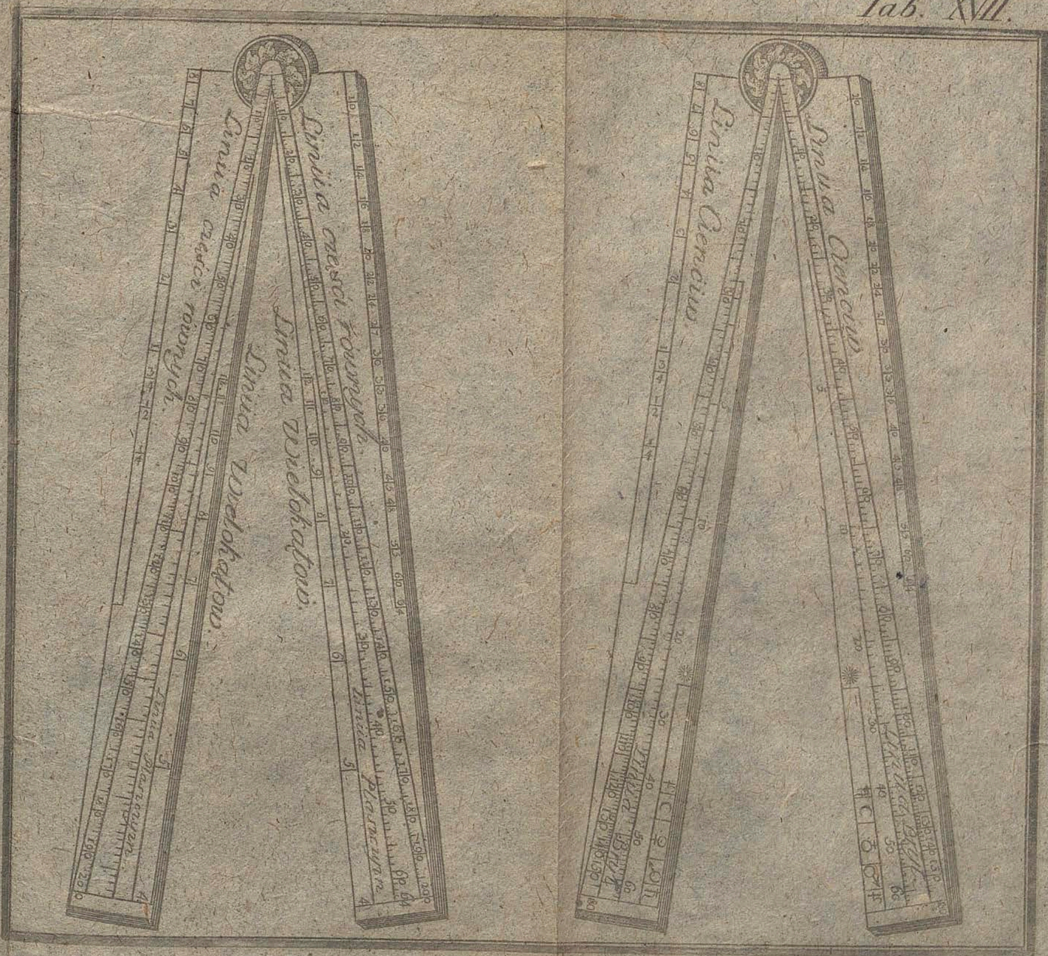

Fig. 5
90. 80. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. 0.
100
1
2
3
4
5
6
7
8
9
90. 80. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. 0. 10.
100


Fig. 6.


Tab. XVI

Michaelem Korybuth
Serenissimam Rempublicam subscripserunt: aliæ verò ius suffragii

Tab. XVII.



Tab. XVIII.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

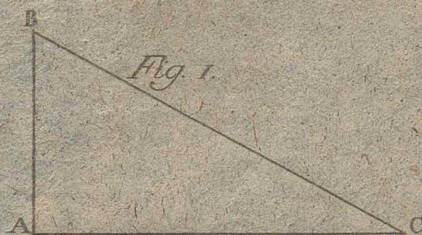
Fig. 4.

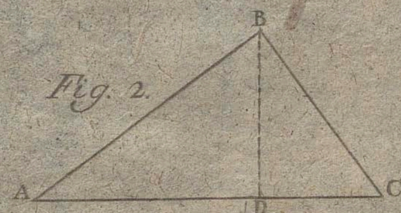
Fig. 5.

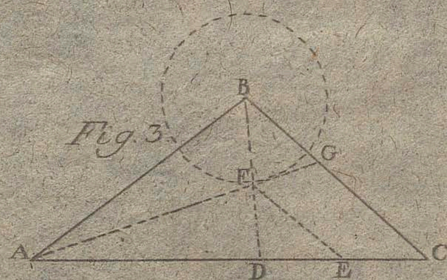
Fig 6.

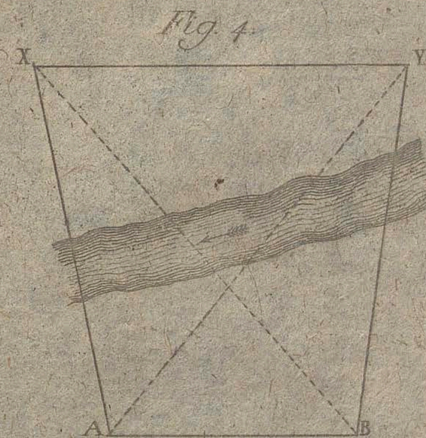
Fig. 7.

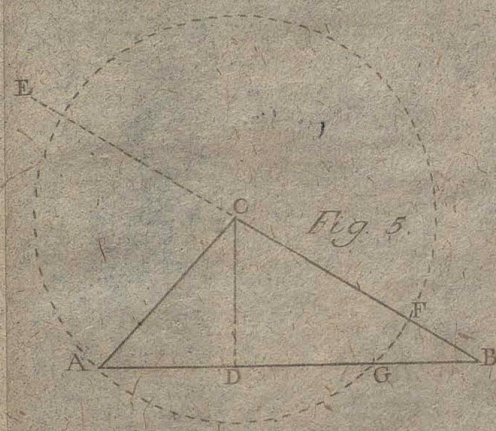
Tab. XIX.



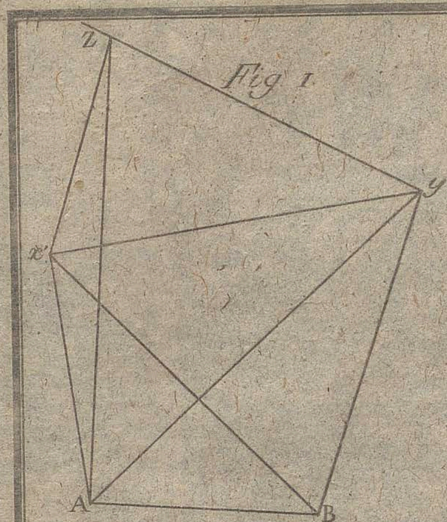


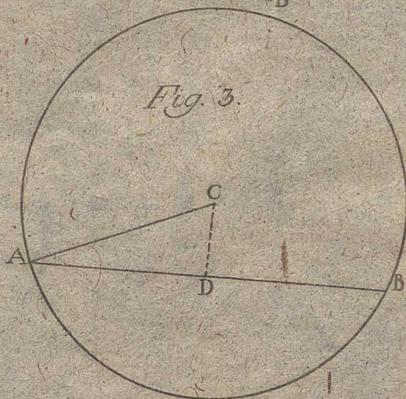


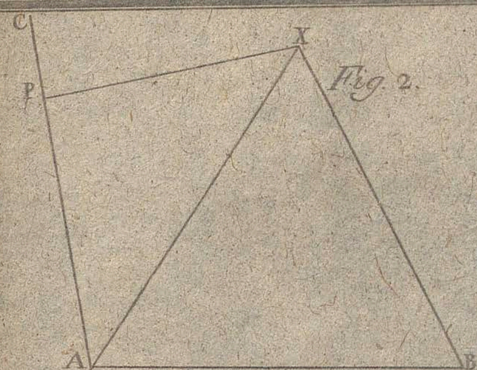


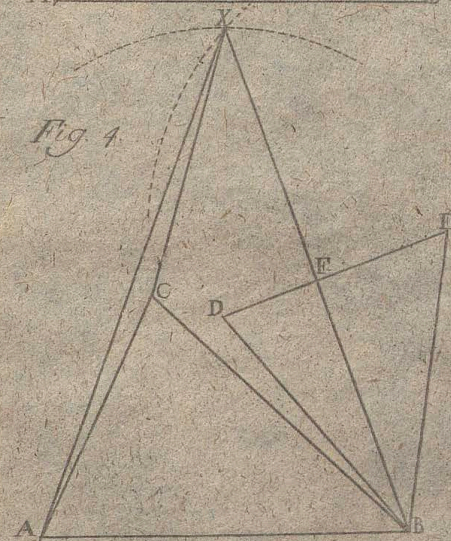


Tab. XX.

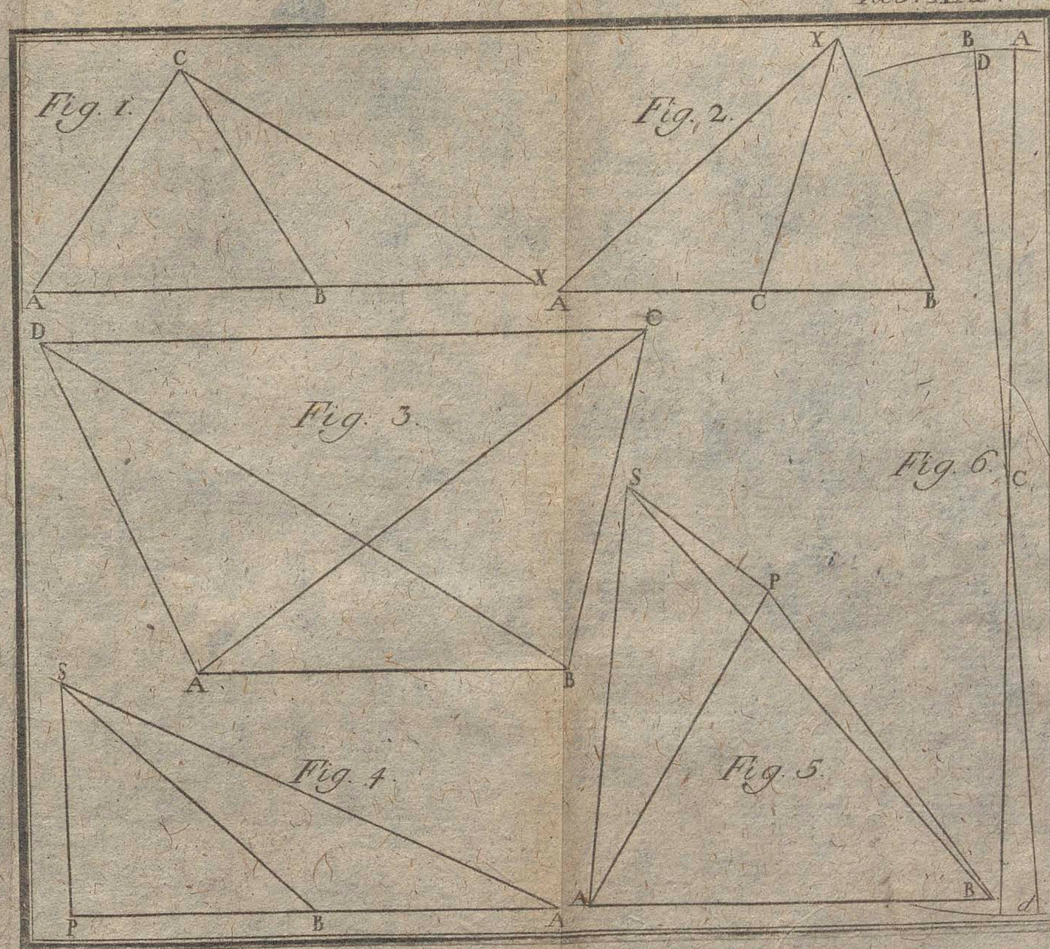




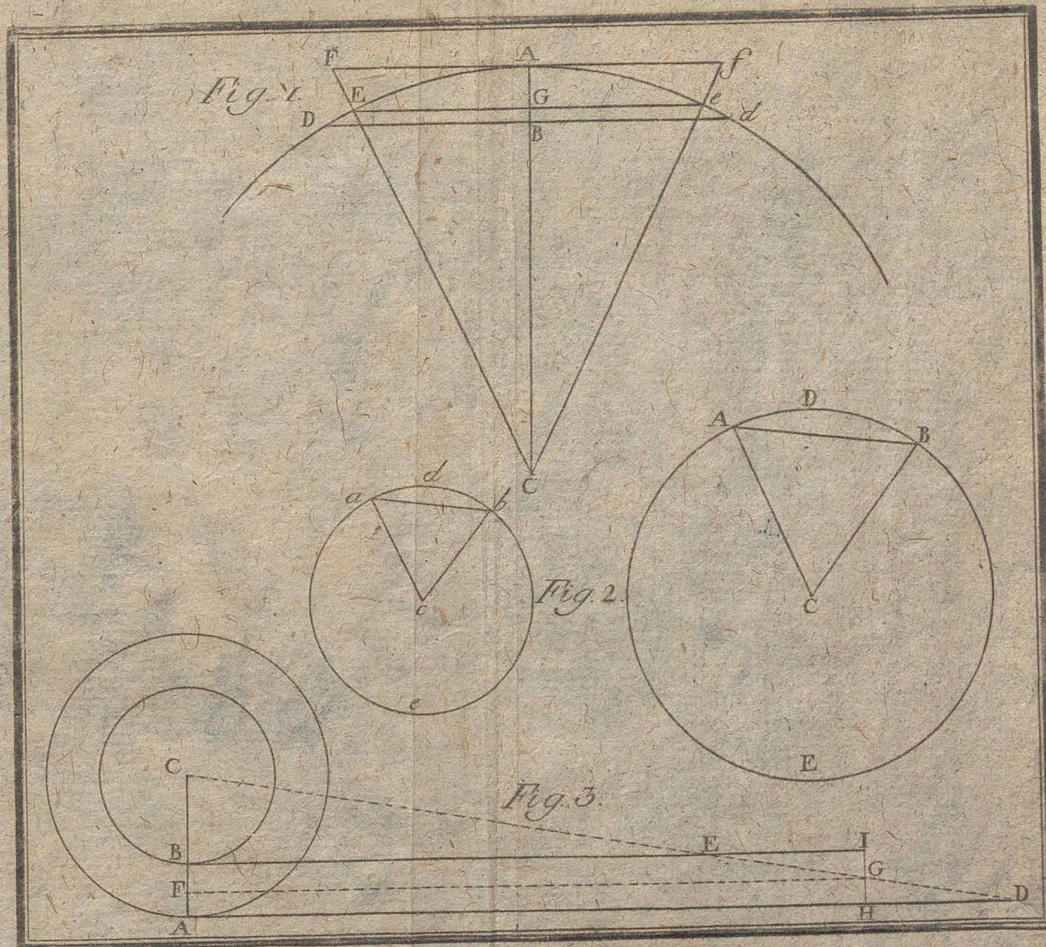




Tab. XXI.



Tab. XXII.



ol. 110. art. 50. fol. 122. art. 33. ante danda suffragia sub pœna non ad-
issionis ad eadem, fuerunt adstrictæ.

Idem ius dandi suffragij Civitati Gedanensi tributum fuisse scribit

... ut dictum supra fol. 94. art. 56. fol. 101 art. 72. fol. 110. art. 50. fol. 122. art. 33. ante danda suffragia sub pœna non admissionis ad eadem, fuerunt adstrictæ.

Idem ... suffragij Civitati Gedanensi tributum fuisse scribit *... Europ. singular. sub A.* 1632. *fol. m.* 453. sed ... usu ... extitisse.

Præ... jus suffragij etiam alij: ac imò, tempore Inaugurati... NDI AVGVSTI *A.* 1530. Dux Prussiæ, ac locum ... Senat... siderium ad proximè futura Comitia rejectum ... *Historiâ rer. Polonic. Lib.* 7 *pag. m.* 526. Deinde ...usdem ... in electione HENRICI VALESII *A.* 1573. qui ad con-

